Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

# Algebra I

Wintersemester 2015/2016

## Blatt 2

**Aufgabe 1 (10 Punkte).** Die Gruppe

$$G = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) := \left\{ g \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; gg^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \det g = 1 \right\}$$

operiere auf $\mathbb{R}^3$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation.

(1) Was sind die $G$-Bahnen in $\mathbb{R}^3$.

(2) Was ist der Stabilisator von $e_1 := (1,0,0)^T$?

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Sei $n \in \mathbb{N}$.

(1) Bestimme das Zentrum der symmetrischen Gruppe $S_n$.

(2) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Bestimme das Zentrum von $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, der Gruppe aller linearen Automorphismen von $\mathbb{K}^n$.

**Aufgabe 3 (15 Punkte).** (Satz von Burnside) Seien $G$ ein endliche Gruppe und $X$ eine endliche Menge, auf der $G$ wirkt. Für Elemente $g \in G$ bezeichnen wir mit $X^g \subseteq X$ die Menge aller Fixpunkte von $G$, d.h. $X^g := \{x \in X \mid g.x = x\}$. Zeige, dass die Anzahl der $G$-Bahnen in $X$ gleich $|G|^{-1} \sum_{g\in G} |X^g|$ ist.
*Hinweis:* Betrachte $R := \{(g,x) \in G \times X \mid g.x = x\}$ und zähle $R$ auf zwei Arten ab.

**Aufgabe 4 (15 Punkte).** Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $q = |\mathbb{F}|$. Bestimme die Anzahl der $d$-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{F}^n$.
*Hinweis:* Betrachte $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n) := \{W \subseteq \mathbb{F}^n \mid W \text{ Untervektorraum mit } \dim W = d\}$ und betrachte die Aktion von $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$ auf $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n)$.