Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 3

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $C_n = \langle g \rangle$ eine endliche, zyklische Gruppe der Ordnung n. Unter einem *primitiven Element* von C_n versteht man ein $h \in C_n$ mit $C_n = \langle h \rangle$. Die Anzahl der primitiven Elemente von C_n wird mit $\phi(n)$ bezeichnet (die *Eulersche Phi-Funktion*).

(1) Unter welcher Bedingung an $k \in \{1, \dots, n\}$ ist g^k ein primitives Element?

(2) Entwickle eine Formel für $\phi(p)$, wenn p eine Primzahl ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Seien $T = \{\mathrm{c}, \mathrm{c}^\sharp, \mathrm{d}, \mathrm{d}^\sharp, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{f}^\sharp, \mathrm{g}, \mathrm{g}^\sharp, \mathrm{a}, \mathrm{a}^\sharp, \mathrm{h}\}$ die verschiedenen Töne, die man auf einer Klaviertastatur spielen kann. Ein verallgemeinerter Quintenzirkel sei definiert als Folge von Tönen, beginnend mit c, in welcher aufeinanderfolgende Töne immer den gleichen Intervallabstand haben. Welche verallgemeinerten Quintenzirkel gibt es, in denen jeder Ton vorkommt?

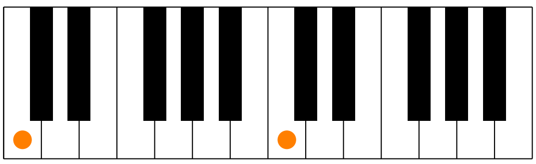

Abbildung 1: Klaviertastatur mit Markierung bei c

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $\pi \in S_n$ und $H := \langle \pi \rangle$. Betrachte die kanonische Wirkung von H auf $\{1, \dots, n\}$, welche durch $h.x := h(x)$ gegeben ist. Sei m die Anzahl der H-Bahnen dieser Wirkung. Zeige: $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{n-m}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe.

(1) Zeige, dass $Z(G) \trianglelefteq G$.

(2) Für $g \in G$ sei $\iota_g \in \mathrm{Aut}(G)$ definiert durch $\iota_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$. Setze $\mathrm{Inn}(G) := \{\iota_g \mid g \in G\} \subset \mathrm{Aut}(G)$ und zeige, dass $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.

(3) Zeige, dass $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

(4) Zeige: Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist G abelsch.

Bemerkung: Die Abbildung ι_g heißt *Konjugation mit g* und $\mathrm{Inn}(G)$ nennt man die *Gruppe der inneren Automorphismen* von G.

Abgabe **Dienstag**, den **03.11.2015**, in der Vorlesung.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe und $S \leq G$. Der *Normalisator* von S in G ist definiert als

$$N_G(S) := \left\{ g \in G \,\middle|\, gSg^{-1} = S \right\}.$$

Man sieht leicht, dass $S \trianglelefteq N_G(S)$.
Sei nun $\mathbb{k}$ ein Körper mit mindestens 3 Elementen, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ und $T \leq G$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen. Zeige:

(1) $N_G(T)$ besteht aus allen invertierbaren Matrizen, bei denen in jeder Spalte genau ein Element von 0 verschieden ist.

(2) $N_G(T)/T$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n.