Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $\mathscr{S}_p(G)$ die Menge der p-Sylow Untergruppen einer Gruppe G und $H \in \mathscr{S}_p(G)$. Zeige, dass $\left|\mathscr{S}_p(G)\right| = (G : N_G(H))$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Wir betrachten die Gruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) = \left\{ g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_p^{2\times 2} \,\middle|\, \det(g) = ad - bc = 1 \right\}.$$

(1) Beweise, dass $\left|\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)\right| = p^3 - p$. Verwende dazu, dass die Determinantenabbildung $\det : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p^\times$ ein Gruppenhomomorphismus ist.
(2) Zeige, dass S_4 keinen Normalteiler der Ordnung 2 enthält.
(3) Zeige, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ und S_4 zwar die gleiche Anzahl Elemente haben, jedoch als Gruppen nicht isomorph sind.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Betrachte die Untergruppe

$$H := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_p^{2\times 2} \,\middle|\, x \in \mathbb{F}_p \right\} \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) =: G$$

(1) Zeige, dass H eine p-Sylow Untergruppe von G ist.
(2) Bestimme die Anzahl der p-Sylow Untergruppen von G.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zeige: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 56.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Es sei $n \geq 3$ und für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\alpha_k := 2\pi\, k\, n^{-1}$. Definiere

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha_k) \\ \sin(\alpha_k) \end{pmatrix} \,\middle|\, k \in \{1, \ldots, n\} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$D := \left\{ \varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2) \,\middle|\, \varphi(E) = E \right\} \leq \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2).$$

Zeige, dass D von der Drehung um den Winkel α_1 und der Spiegelung an $\mathbb{R}(1,0)^T$ erzeugt wird. D.h. zeige, dass

$$D = \left\langle \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bemerkung: Dies zeigt, dass $D = D_{2n}$ die Diedergruppe mit $2n$ Elementen ist.

Abgabe **Dienstag**, den **10.11.2015**, in der Vorlesung.