Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeige:

(1) $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ ist semidirektes Produkt von $\mathrm{SL}(n, \Bbbk)$ und $\Bbbk^\times$, wobei $\Bbbk$ ein Körper ist.

(2) $\mathfrak{A}_4$ ist semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$, wobei $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei G eine endliche Gruppe. Sei weiterhin $N \trianglelefteq G$ mit $\mathrm{ggT}(|N|, |G/N|) = 1$. Zeige:

(1) Falls $H \leq G$ mit $|H| = |G/N|$, dann $G = HN$.

(2) Für $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ ist $\phi(N) = N$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Zeige, dass es bis auf Isomorphie

(1) genau zwei semidirekte Produkte der Form $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\theta \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und

(2) genau zwei semidirekte Produkte der Form $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$. Zeige, dass G genau dann auflösbar ist, wenn N und G/N auflösbar sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die Gruppe $B \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ der oberen Dreiecksmatrizen, d.h.

$$B = \left\{ (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \;\middle|\; \forall j < i : a_{i,j} = 0 \right\},$$

auflösbar ist.

Abgabe **Dienstag**, den **17.11.2015**, in der Vorlesung.