Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

# Algebra I

Wintersemester 2015/2016

## Blatt 6

**Aufgabe 1 (10 Punkte).** Es sei $G$ eine Gruppe. Für $g, h \in G$ setzen wir $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Die *Kommutatoruntergruppe* $[G, G]$ von $G$ ist definiert als das Erzeugnis aller Kommutatoren in $G$, d.h.

$$[G, G] := \langle \{[g, h] \mid g, h \in G\} \rangle .$$

Definiere weiterhin $D^0G := G$ und $D^{i+1}G := [D^iG, D^iG]$ rekursiv. Zeige:

(1) $[G, G] \trianglelefteq G$.

(2) $G/[G, G]$ ist abelsch.

(3) Für alle $N \trianglelefteq G$ mit abelscher Faktorgruppe $G/N$ gilt $[G, G] \leq N$.

(4) $G$ ist genau dann auflösbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $D^nG = \{1\}$ gibt.

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Gib eine Kompositionsreihe für $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ an.

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** Sei $A$ ein kommutativer Ring. Ein Ideal $I \subseteq A$ heißt *maximal*, wenn $I \neq A$ und es kein Ideal $J$ mit $I \subsetneq J \subsetneq A$ gibt. Zeige:

(1) Ein Ideal $I \subseteq A$ ist genau dann prim, wenn $A/I$ ein Integritätsbereich ist.

(2) Ein Ideal $I \subseteq A$ ist genau dann maximal, wenn $A/I$ ein Körper ist.

(3) Jedes maximale Ideal ist prim.

**Aufgabe 4 (10 Punkte).** Sei $A$ ein kommutativer Ring mit einem nilpotenten Element $a \in A \setminus \{0\}$, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$. Zeige:

(1) Falls $\zeta \in A^\times$ eine Einheit ist, so ist auch $\zeta - a \in A^\times$.

(2) Es ist $A^\times \subsetneq A[X]^\times$, d.h. die Einheitengruppe $A^\times$ ist eine *echte* Untergruppe der Einheitengruppe $A[X]^\times$.

**Aufgabe 5 (10 Punkte).** Es sei $R$ ein endlicher Integritätsring.

(1) Zeige, dass $R$ ein Körper ist.

(2) Gibt es einen Integritätsring mit 10 Elementen?

---

Abgabe **Dienstag**, den **24.11.2015**, in der Vorlesung.