Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige: R ist genau dann ein Körper, wenn $\{0\}$ und R die einzigen Ideale in R sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Ein Integritätsbereich R heißt *Hauptidealring*, falls jedes Ideal $I \subseteq R$ von der Form $I = xR$, $x \in R$, ist.
Seien nun X, Y Unbestimmte über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeige, dass der Integritätsbereich $\mathbb{K}[X, Y]$ kein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei R ein kommutativer Ring, welcher einen Körper $\mathbb{K}$ enthält. Zeige:

(1) R ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(2) Falls $\dim_{\mathbb{K}} R < \infty$, so ist jedes Element in $R \setminus \{0\}$ entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

(3) Die Aussage in (2) ist falsch, falls $\dim_{\mathbb{K}} R = \infty$.

Bem: Ist R wie oben beschrieben, so nennt man R auch eine $\mathbb{K}$-*Algebra*.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $d \in \mathbb{Z}, d \geq 2$. Wir definieren

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] := \left\{ a + b\sqrt{-d} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

als Unterring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Zeige

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]^\times = \left\{ a + b\sqrt{-d} \;\middle|\; a^2 + b^2 d = 1 \right\}$.

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \cong \mathbb{Z}[X]/(x^2 + 2)$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Finde alle $x \in \mathbb{Z}$, welche

(1) $x \equiv 1 \bmod 7$, $x \equiv 3 \bmod 13$, $x \equiv 2 \bmod 3$,

(2) $x \equiv 2 \bmod 5$, $x \equiv 1 \bmod 7$, $x \equiv 1 \bmod 52$

erfüllen.

Abgabe **Dienstag**, den **01.12.2015**, in der Vorlesung.