Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 8

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei p eine Primzahl und φ die Eulersche Phi-Funktion (siehe Blatt 3). Zeige: Für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt

$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es seien A, B kommutative Ringe und $\Phi : A \to B$ ein Rinhomomorphismus. Zeige:

(1) Wenn $P \subset B$ ein Primideal ist, dann ist $\Phi^{-1}(P)$ ein Primideal in A.

(2) Wenn $M \subset B$ ein maximales Ideal ist, dann ist $\Phi^{-1}(M)$ nicht notwendigerweise ein maximales Ideal in A.

(3) Wenn A ein Körper ist und $B \neq \{0\}$, dann ist Φ injektiv.

(4) Wenn A und B Körper sind, dann ist $\operatorname{char} A = \operatorname{char} B$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). (1) Es sei R ein Ring, in dem gilt

$$\forall x \in R : x^2 = x.$$

Zeige, dass R kommutativ ist.

(2) Es sei R ein kommutativer Ring, in welchem gilt:

$$\forall x \in R : \exists n \in \mathbb{N}_{>1} : x^n = x.$$

Zeige, dass jedes Primideal in R maximal ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $f = X^5 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ und $R := \mathbb{F}_2[X]/(f)$. Sei weiterhin $x := X \bmod (f)$. Zeige, dass $x + 1 \in R^\times$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Es sei $i := \sqrt{-1}$ und $R := \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeige:

(1) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ existieren $q \in R$ und $w \in \mathbb{C}$, so dass $z = q + w$ und $|w| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) Der Ring R ist euklidisch bezüglich $\delta : R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $q \mapsto |q|^2$.

(3) Der Ring R ist ein Hauptidealbereich.

(4) Das Ideal $5R \subset \mathbb{Z}[i]$ ist nicht maximal.

(5) Das Ideal $11R \subset \mathbb{Z}[i]$ ist maximal.

Hinweis: Verwende für (4) und (5) die euklidische Norm in $\mathbb{C}$.

Abgabe **Dienstag**, den **08.12.2015**, in der Vorlesung.