Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 9

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es seien n, m ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$. Sei weiterhin R ein Integritätsbereich und $a, b \in R$. Zeige: Falls $a^n = b^n$ und $a^m = b^m$, so gilt $a = b$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei R ein kommutativer Ring und

$$N := \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\},$$

die Menge der nilpotenten Elemente. Zeige:

(1) N ist ein Ideal in R.

(2) Für alle $z \in R/N$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $z^n = 0$, dann ist $z = 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei $p > 2$ eine Primzahl. Wir werden in der Vorlesung zeigen, dass die Gruppe $\mathbb{F}_p^\times$ zyklisch ist. Dies darf im Folgenden verwendet werden.

(1) Zeige: $[\mathbb{F}_p^\times : (\mathbb{F}_p^\times)^2] = 2$, wobei $(\mathbb{F}_p^\times)^2 := \left\{ a^2 \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_p^\times \right\}$.

(2) Zeige, dass $-1 \in (\mathbb{F}_p^\times)^2$ genau dann gilt, wenn $4 \mid (p-1)$.

(3) Zeige: Falls eine Primzahl p Summe von zwei Quadraten ist, so ist $p - 1$ durch 4 teilbar.

(4) Zeige, dass das Ideal $(3, 1 + \sqrt{-5}) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein Hauptideal ist.
Hinweis: Verwende Überlegungen von Blatt 8, Aufgabe 5.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zerlege $X^8 + X^6 - X^5 - X^2 - X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ in quadratfreie Faktoren.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Zeige jeweils, dass das Polynom quadratfrei ist und berechne seine irreduziblen Faktoren mit Berlekamps Algorithmus.

(1) $X^4 - X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.

(2) $X^3 - 2X^2 - X - 2 \in \mathbb{F}_5[X]$.