Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 10

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $R = \mathbb{K}[X,Y]/(X^2 - Y^3)$. Seien weiterhin x, y die Restklassen von X, Y in R. Zeige: x und y sind irreduzibel, aber die Ideale (x) und (y) sind nicht prim.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und X eine Unbestimmte über $\mathbb{K}$. Zeige:

(1) Es gibt in $\mathbb{K}[X]$ unendlich viele irreduzible normierte Polynome.

(2) Falls jedes nicht-konstante Polynom in $\mathbb{K}[X]$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ besitzt, so gilt $|\mathbb{K}| = \infty$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei R ein Ring. Zeige, dass die Anzahl der Monome in $R[X_1, \ldots, X_n]$ vom Totalgrad $d \geq 0$ gleich

$$\binom{n+d-1}{n-1}$$

ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Es sei $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper. Jedes $f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ definiert eine Funktion $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $a \mapsto f(a)$. Seien $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige:

(1) Falls für alle $a \in \mathbb{K}^n$ gilt, dass $f(a) = 0$, dann ist $f = 0$.

(2) Falls f und g die gleichen Funktionen definieren, dann gilt $f = g$.

(3) Finde ein Beispiel eines endlichen Körpers $\mathbb{K}$ und $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, so dass $f \neq g$, aber für alle $a \in \mathbb{K}^n$ gilt, dass $f(a) = g(a)$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\Phi : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{K}[Y_1, \ldots, Y_m]$ ein Ringisomorphismus mit $\Phi|_{\mathbb{K}} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$. Zeige, dass $m = n$.

Abgabe **Dienstag**, den **05.01.2015**, in der Vorlesung.