Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 12

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei R ein Ring. Berechne $\operatorname{disc}(f)$ für $f \in R[X]$ wie folgt

(1) $f = X^2 + aX + b$.

(2) $f = X^m + aX + b$, $m \geq 2$.

(3) $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Für $\alpha \in R$ definieren wir

$$t_\alpha : R[X] \to R[X], f(X) \mapsto f(X + \alpha).$$

Zeige: Ist $f \in R[X]$ normiert und $\alpha \in R$, so gilt $\operatorname{disc}(f) = \operatorname{disc}(t_\alpha(f))$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring und seien $f, g, h \in R[X] \setminus R$ normiert. Zeige:

(1) $\operatorname{res}(fg, h) = \operatorname{res}(f, h) \cdot \operatorname{res}(g, h)$,

(2) $\operatorname{disc}(fg) = \operatorname{disc}(f) \cdot \operatorname{disc}(g) \cdot \operatorname{res}(f, g)^2$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad 3. Zeige, dass f genau dann drei verschiedene, reelle Nullstellen hat, wenn $\operatorname{disc}(f) > 0$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). (1) Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$. Sei $s \in \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_n]$ ein symmetrisches Polynom. Zeige, dass $s(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Q}$.

(2) Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom vom Grad 3. Seien weiterhin $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f und $\delta = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$. Zeige: Es ist $\delta \in \mathbb{Q}[a_1]$ genau dann, wenn $\delta \in \mathbb{Q}$.

Hinweis: In der Vorlesung werden wir Folgendes zeigen.

- Ist R eine Ringerweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} R < \infty$, dann ist R ein Körper.
- Sind $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ Körper, dann ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}$ ein Teiler von $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{L}$.

Abgabe **Dienstag**, den **19.01.2015**, in der Vorlesung.