Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Paul Breiding Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 13 - Musterlösung

Für die Korrektheit der Lösungen wird keine Gewähr übernommen.

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(1) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ mit $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = p$. Zeige: Es existiert $a \in \mathbb{L}$ mit $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$.

(2) Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2^k$, $k \geq 0$, und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein kubisches Polynom, welches in $\mathbb{L}$ eine Nullstelle hat. Zeige, dass f bereits eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat.

(3) Zeige, dass jedes reelle Polynom von ungeradem Grad eine reelle Nullstelle hat.

Lösung. (1) Wähle $a \in \mathbb{L} \backslash \mathbb{K}$. Dann ist $p = [\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}]\,[\mathbb{L} : \mathbb{K}(a)]$. Da $a \notin \mathbb{K}$, muss $[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] > 1$ sein, also $[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] = p$. Dann ist $[\mathbb{L} : \mathbb{K}(a)] = 1$ und $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$.

(2) Beachte, dass f genau dann eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat, wenn es irreduzibel in $\mathbb{K}[X]$ ist. Angenommen f ist irreduzibel. Sei $a \in \mathbb{L}$ eine Nullstelle von f, die in $\mathbb{L}$ liegt. Dann ist $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}(a) \subset \mathbb{L}$. Daraus folgt $3 = \deg(f) = [\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] \mid [\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2^k$. Das ist ein Widerspruch und f ist daher nicht irreduzibel.

(3) Verwende, dass $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. ■

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung. Man zeige:

(1) Für $a \in \mathbb{L}$ ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ gleich dem Minimalpolynom der $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $\phi_a \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, $x \mapsto a \cdot x$.

(2) Es gilt $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ genau dann, wenn das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ gleich dem *charakteristischen* Polynom von ϕ_a ist.

Lösung. (1) Sei $a \in \mathbb{L}$. Per Definition ist das Minimalpolynom $m_{\phi_a} \in \mathbb{K}[X]$ von ϕ_a, das Polynom vom kleinsten Grad, so dass $m_{\phi_a}(\phi_a) = 0$. Wir zeigen nun, dass $m_{\phi_a}(a) = 0$. Da m_{ϕ_a} von minimalem Grad ist und aus $\mathbb{K}[X]$ ist, muss es in diesem Fall schon das Minimalpolynom von a sein. Sei $m_{\phi_a} = \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i$. Für alle $x \in \mathbb{L}$ gilt

$$0 = m_{\phi_a}(\phi_a)(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i\, \phi_a^i(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i\, a^i x = x \sum_{i=0}^n \lambda_i\, a^i$$

und daher $m_{\phi_a}(a) = 0$.

(2) Sei $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = n$. Dann gilt

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(a) \Longleftrightarrow \deg m_{\phi_a}(X) = n.$$

Wir bezeichnen mit $\chi_{\phi_a}(X)$ das char. Polynom von ϕ_a. Aus Lineare Algebra I ist bekannt, dass $\deg \chi_{\phi_a}(X) = n$ und dass $\chi_{\phi_a}(X)$ ein Vielfaches von $m_{\phi_a}(X)$ ist. Es folgt, dass $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ genau dann, wenn $m_{\phi_a}(X) = \chi_{\phi_a}(X)$. ■

Aufgabe 3 (10 Punkte). Berechne das Minimalpolynom von

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(2) $\zeta + \zeta^{-1}$, wobei $\zeta := \exp(2\pi i/5)$.

Zeige zudem, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Lösung. (1) Es ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$, so dass

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4.$$

Weiterhin ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, woraus folgt, dass

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Wir können nun Aufgabe 2 verwenden. Als $\mathbb{Q}$-Vektorraum hat $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ die Basis $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}\right\}$. Damit lässt sich die Abbildung $\phi_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ mit folgender Matrix darstellen.

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nach Aufgabe 2 ist das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ gleich $\det(M - X\,\mathrm{Id}_{4\times 4})$

(2) Es ist $\zeta + \zeta^{-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ Nullstelle von $\frac{1}{4}(2X+1)^2 - 5 = X^2 + X - 1 := f(X)$. Da $\zeta + \zeta^{-1} \notin \mathbb{Q}$, muss das Minimalpolynom von $\zeta + \zeta^{-1}$ mindestens Grad 2 haben. Es folgt, dass f das Minimalpolynom von $\zeta + \zeta^{-1}$ ist. ■

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Zeige: $a, b \in \mathbb{L}$ sind genau dann algebraisch über $\mathbb{K}$, falls $a + b$ und ab algebraisch über $\mathbb{K}$ sind.

Lösung. Seien $a, b \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{L}$. Dann sind auch $a + b, ab \in \mathbb{K}(a, b)$ algebraisch über $\mathbb{K}$. Seien nun $a + b, ab \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$. Es genügt zu zeigen, dass a, b algebraisch über $\mathbb{K}(a + b, ab)$ sind. Sei $f(T) = T^2 - (a + b)T + ab \in \mathbb{K}(a + b, ab)[T]$. Dann ist $f(a) = 0$. Analog können wir zeigen, dass b algebraisch über $\mathbb{K}(a + b, ab)$ ist. ■

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in \mathbb{L}$ heißt *transzendent* über $\mathbb{K}$, falls es nicht algebraisch über $\mathbb{K}$ ist.

(1) Sei $x \in \mathbb{L}$ transzendent über $\mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige, dass x^n transzendent über $\mathbb{K}$ ist und dass $[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}(x^n)] = n$.

(2) Ist $\alpha \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$, so gilt $[\mathbb{K}(\alpha^n) : \mathbb{K}] \geq \frac{1}{n} [\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$.

Lösung. (1) Sei $x \in \mathbb{L}$ transzendent über $\mathbb{K}$. Angenommen x^n ist nicht transzendent über $\mathbb{K}$, dann ist es Nullstelle eines Polynoms aus $\mathbb{K}[T]$, etwa $f(T) \in \mathbb{K}[T]$. Dann ist aber x Nullstelle von $f(T^n) \in \mathbb{K}[T]$ und daher nicht transzendent.
Es ist einfach zu sehen, dass x Nullstelle von $T^n - x^n \in \mathbb{K}(x^n)[T]$ ist. Daher gilt $[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}(x^n)] \leq n$. Da x transzendent über $\mathbb{K}$ ist, sind $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{K}(x^n)$, woraus folgt, dass $[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}(x^n)] \geq n$.

(2) Es ist α eine Nullstelle von $T^n - \alpha^n \in \mathbb{K}(\alpha^n)[T]$. Daher gilt $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}(\alpha^n)] \leq n$ und somit

$$[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = [\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}(\alpha^n)]\,[\mathbb{K}(\alpha^n) : \mathbb{K}] \leq n\,[\mathbb{K}(\alpha^n) : \mathbb{K}],$$

woraus die Behauptung folgt. ■