Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 13

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(1) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ mit $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = p$. Zeige: Es existiert $a \in \mathbb{L}$ mit $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$.

(2) Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2^k$, $k \geq 0$, und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein kubisches Polynom, welches in $\mathbb{L}$ eine Nullstelle hat. Zeige, dass f bereits eine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat.

(3) Zeige, dass jedes reelle Polynom von ungeradem Grad eine reelle Nullstelle hat.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung. Man zeige:

(1) Für $a \in \mathbb{L}$ ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ gleich dem Minimalpolynom der $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $\phi_a \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L},\ x \mapsto a \cdot x$.

(2) Es gilt $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ genau dann, wenn das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ gleich dem *charakteristischen* Polynom von ϕ_a ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Berechne das Minimalpolynom von

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(2) $\zeta + \zeta^{-1}$, wobei $\zeta := \exp(2\pi i/5)$.

Zeige zudem, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Zeige: $a, b \in \mathbb{L}$ sind genau dann algebraisch über $\mathbb{K}$, falls $a + b$ und ab algebraisch über $\mathbb{K}$ sind.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in \mathbb{L}$ heißt *transzendent* über $\mathbb{K}$, falls es nicht algebraisch über $\mathbb{K}$ ist.

(1) Sei $x \in \mathbb{L}$ transzendent über $\mathbb{K}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige, dass x^n transzendent über $\mathbb{K}$ ist und dass $[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}(x^n)] = n$.

(2) Ist $\alpha \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$, so gilt $[\mathbb{K}(\alpha^n) : \mathbb{K}] \geq \frac{1}{n} [\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$.

Abgabe **Dienstag**, den **26.01.2015**, in der Vorlesung.