Prof. Peter Bürgisser
Dr. Pierre Lairez
Paul Breiding

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Algebra I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 14

Aufgabe 1 (10 Punkte). Eine Körpererweiterung $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ heißt normal, falls jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{K}[X]$, welches in $\mathbb{L}$ eine Nullstelle hat, über $\mathbb{L}$ in Linearfaktoren zerfällt.
Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper mit $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = n < \infty$. Zeige: Ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ eine normale Erweiterung und n ungerade, so ist $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Es sei $n > 2$ ungerade, α eine primitive n-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$ und $\beta := -\alpha^2$. Zeige:

(1) β ist eine primitive $2n$-te Einheitswurzel.

(2) $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Zeige, dass eine Körperweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ genau dann algebraisch ist, wenn jeder Unterring $\mathbb{K} \subseteq R \subseteq \mathbb{L}$ ein Körper ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Seien $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen, $n \geq 1$. Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel und E der Zerfällungskörper von f. Wir definieren die *Galois-Gruppe von f* als

$$\mathrm{Gal}(f) = \{\phi \in \mathrm{Aut}(E) \mid \forall x \in \mathbb{Q} : \phi(x) = x\}.$$

(1) Zeige, dass $\mathrm{Gal}(f)$ transitiv auf den Nullstellen von f operiert.
Bemerkung: Dies zeigt, dass wir $\mathrm{Gal}(f) \leq S_{\deg(f)}$ annehmen können.

(2) Sei nun $\deg(f) = 3$. Wir bezeichnen die Nullstellen von f mit a_1, a_2, a_3 und setzen $\delta = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$. Zeige: Es ist $\mathrm{Gal}(f) = S_3$ genau dann, wenn $\delta \notin \mathbb{Q}$.
Hinweis: Siehe auch Zettel 12, Aufgabe 5.

Abgabe **Dienstag**, den **02.02.2016**, in der Vorlesung.