

# ALGEBRA I

Wintersemester 2015/2016  
**Übung am 04.11.2015**

Die Aufgaben dienen als zusätzliches Lernmaterial. Sie werden gemeinsam in der Übung bearbeitet.

**Aufgabe 1.** Es sei  $G$  eine Gruppe mit 55 Elementen, welche auf einer Menge  $X$  mit 39 Elementen operiert. Zeige, dass diese Operation einen Fixpunkt hat.

**Aufgabe 2.** Zeige: Ist  $G$  eine  $p$ -Gruppe und  $|G| > 1$ , so ist  $Z(G) \neq \{e\}$ .

**Aufgabe 3.** Zeige: Sei  $p$  eine Primzahl. Zeige: Jede Gruppe der Ordnung  $p^2$  ist abelsch.

**Aufgabe 4.** Es sei  $G$  eine Gruppe mit 56 Elementen. Zeige, dass  $G$  eine nichttriviale Sylowgruppe  $N$  besitzt mit  $N \trianglelefteq G$ .

**Aufgabe 5.** Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $n > 1$ . Setze  $\text{MAPS} := \{\varphi : G \rightarrow \{1, \dots, n\}\}$ . Betrachte die Operation von  $G$  auf  $\text{MAPS}$  definiert durch

$$g \cdot \varphi := (x \mapsto \varphi(xg)).$$

- (1) Was sind die Fixpunkte dieser Operation?
- (2) Sei  $H \leq G$ . Finde  $\varphi \in \text{MAPS}$  mit  $H = G_\varphi$ .
- (3) Sei nun  $p$  eine Primzahl. Zeige mit Hilfe obiger Konstruktion, dass für alle  $c \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $p \mid c^p - c$ .

**Aufgabe 6.** Sei  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ . Die Gruppe  $\text{SL}(\mathbb{R}^2)$  operiert auf  $\mathbb{H}$  durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

- (1) Zeige, dass die Operation transitiv ist.
- (2) Berechne  $\text{SL}(\mathbb{R}^2)_i$ .
- (3) Berechne  $\{A \in \text{SL}(\mathbb{R}^2) \mid \forall z \in \mathbb{H} : Az = z\}$ .

**Aufgabe 7.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$ , welche eine  $p$ -Gruppe ist. Zeige: Falls  $H \trianglelefteq G$ , so ist  $H$  in jeder  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  enthalten.

**Aufgabe 8.** Zeige, dass  $A_4$  keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt.

---