Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Paul Breiding Sekretariat MA 3-2

# Algebra I

Wintersemester 2015/2016

## Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Die folgenden Aufgaben dienen zur Klausurvorbereitung. Ich habe sie ausgewählt, weil ich sie von der Schwierigkeit her für gute Klausuraufgaben halte. Das heißt aber nicht, dass die Klausur tatsächlich vom Niveau und vom Typ her genauso sein wird.

**Aufgabe 1 (Gruppen 1).** Sei $G$ eine endliche Gruppe.

(1) Angenommem es gilt: $\forall a \in G : a^2 = e$. Zeige, dass $G$ abelsch ist.

(2) Sei $G$ von ungerader Ordnung, $a \in G$. Zeige: $\langle a \rangle = \langle a^2 \rangle$.

(3) Sei $G$ nicht kommutativ. Zeige, dass $|G| \geq 6$.

(4) Sei $G$ von Ordnung 8. Existiert für alle $g \in G$ ein $h \in G$ mit $h^2 = g$?

**Aufgabe 2 (Gruppen 2).** Sei $G$ eine Gruppe und $H, K \leq G$ Untergruppen von $G$.

(1) Zeige: $G = H \cup K \iff G = H$ oder $G = K$.

(2) Angenommen es existiert ein $g \in G$ mit $H = gKg^{-1}$. Zeige: $G = HK \iff G = H$.

**Aufgabe 3 (Gruppenwirkung).** Es sei $G = \langle \{a, b\} \rangle$, wobei $\operatorname{ord}(a) = 7$, $\operatorname{ord}(b) = 11$. Die Gruppe $G$ wirke auf einer Menge $M$ mit $|M| = 8$. Zeige, dass die Wirkung von $G$ auf $M$ nicht transitiv ist.
*Hinweis:* Fasse die Wirkung von $G$ auf $M$ als Homomorphismus $\phi : G \to S_8$ auf und betrachte $\ker \phi$.

**Aufgabe 4 (Normalteiler).** Sei $G$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe von $G$. Setze $N := \left\{ h \in H \,\middle|\, \forall g \in G : ghg^{-1} \in H \right\}$.

(1) Zeige mit Hilfe des Untergruppenkriteriums, dass $N \leq H$.

(2) Zeige, dass $N$ ein Normalteiler von $G$ ist.

(3) Sei $L \leq G$ ein Normalteiler mit $L \subset H$. Zeige, dass $L \subset N$.

**Aufgabe 5 (Auflösbarkeit von Gruppen).** Es sei $G$ eine Gruppe von Ordnung $pq$, wobei $p \neq q$ Primzahlen sind. Zeige, dass $G$ auflösbar ist.

**Aufgabe 6 (Permutationsgruppen 1).** Sei $\sigma \in S_n$ und $\langle \sigma \rangle$ die von $\sigma$ erzeugte Untergruppe von $S_n$. Die Gruppe $\langle \sigma \rangle$ wirkt auf $\{1, \ldots, n\}$ durch Permutation. Sei $m$ die Anzahl der Bahnen dieser Wirkung. Zeige, dass $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-m}$.

**Aufgabe 7 (Permutationsgruppen 2).** (1) Sei $\pi \in S_n$ ein Zyklus der Länge $r \leq n$, etwa $\pi = (x_1, \ldots, x_r)$. Zeige: Für alle $\sigma \in S_n$ gilt, dass $\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_r))$.

(2) Betrachte nun die Wirkung von $S_n$ auf sich selbst via Konjugation. Was sind die Bahnen dieser Wirkung?

**Aufgabe 8 (Ringe).** Es bezeichne $\oplus$ die übliche Addition auf $\mathbb{R}[X]$. Wir definieren

$$(f \odot g)(x) := f(0)g(0) + \int_0^x f'(t)g'(t)\mathbf{d}t.$$

Zeige:

(1) $M := (\mathbb{R}[X], \oplus, \odot)$ ist ein Ring mit 1 (Assoziativ- und Distributivgesetz brauchen nicht verifiziert werden).

(2) Die Menge $I = \{f \in M \mid f(0) = 0\}$ ist ein Ideal in $M$.

(3) Berechne $\{f \in M \mid f^2 = f\}$.

(4) Ist $M$ ein Integritätsring?

**Aufgabe 9 (Hauptidealringe).** Es sei $R$ ein euklidischer Ring. Zeige, dass $R$ ein Hauptidealring ist.

**Aufgabe 10 (Restklassenringe).** Wie viele Elemente hat der Restklassenring $R/I$ für

(1) $R = \mathbb{Z}$, $I = (27, 36)$.

(2) $R = \mathbb{Z}[X]$, $I = (3, X)$.

(3) $R = \mathbb{Z}[i]$ mit $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, $I = 3\mathbb{Z}[i]$.

Ist einer der Restklassenringe ein Körper?

**Aufgabe 11 (Isomorphiesatz).** Es sei $R := \left\{ \frac{z}{3^k} \,\middle|\, z \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} \subset \mathbb{Q}$. Finde $f \in \mathbb{Z}[X]$, so dass $R \cong \mathbb{Z}[X]/f$ und beweise deine Behauptung.

**Aufgabe 12 (Irreduzible Polynome).** (1) Zeige: $X^3 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$.

(2) Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige: Es gibt ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{K}[X]$ vom Grad $n$.

(3) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f = X^2 - a \in \mathbb{K}[X]$ irreduzibel in $\mathbb{K}[X]$. Sei weiterhin $g = X^4 - a \in \mathbb{K}[X]$ und $b$ eine Nullstelle von $g$. Setze $c := b^2$ und $\mathbb{L} := \mathbb{K}(c)$. Zeige, dass $g$ genau dann irreduzibel über $\mathbb{K}$ ist, wenn $X^2 - c \in \mathbb{L}[X]$ über $\mathbb{L}$ irreduzibel ist.

**Aufgabe 13 (Integritätsbereiche).** Es sei $R$ ein Integritätsbereich und $x \in R$. Mit $\operatorname{ord}(x)$ bezeichnen wir die Ordnung von $x$ bezüglich der additiven Gruppe $(R, +)$. Zeige:

(1) $\forall x, y \in R \setminus \{0\} : \operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(y)$.

(2) Für $x \neq 0$ ist $\operatorname{ord}(x)$ eine Primzahl oder $\operatorname{ord}(x) = \infty$.

**Aufgabe 14 (Elementarsymmetrische Polynome).** (1) Gib die elementarsymmetrischen Polynome vom Grad $\leq 3$ an.

(2) Stelle das symmetrische Polynom $f = X_1^3 + X_2^3$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen dar.

**Aufgabe 15 (Galois-Erweiterungen von $\mathbb{Q}$).** Es sei $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ eine endliche algebraische Körpererweiterung. Zeige:

(1) Ist $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 2$, so ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ eine Galois-Erweiterung.

(2) Ist $x \in \mathbb{K}$, so gilt

$$\prod_{\sigma \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})} \sigma(x) \in \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad \sum_{\sigma \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{K})} \sigma(x) \in \mathbb{Q}.$$

(3) Ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ eine Galois-Erweiterung und $\mathbb{K} \not\subset \mathbb{R}$, so ist $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ gerade.

**Aufgabe 16 (Körpererweiterungen von endlichen Körpern).** Es sei $p > 5$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ ein Körper mit $p$ Elementen. Sei weiterhin $f(X) := X^5 - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ und $\alpha \neq 1$ eine Nullstelle von $f$. Zeige:

(1) $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

(2) Sei $\omega := \alpha + \alpha^4$. Zeige: $[\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_p(\omega)] = 2$.

(3) Folgere, dass gilt: $\omega \in \mathbb{F}_p \iff p^2 - 1 \equiv 0 \bmod 5$.
*Hinweis:* Es darf verwendet werden, dass die multiplikative Gruppe endlicher Körper zyklisch ist.