Exercise sheet #1

Prof. Peter Bürgisser, Dr. Pierre Lairez, Paul Breiding and Jesko Hüttenhain

April 22, 2016

Exercise 1. Sei $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit ist. Ein *primitives Element* von K über $\mathbb{Q}$ ist ein $\alpha \in K$, so dass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Finde ein primitives Element von K über $\mathbb{Q}$ (und beweise deine Behauptung).

Exercise 2. Sei K ein endlicher Körper. Zeige:

1. Es gilt $\prod_{x \in K^\times} x = -1$.
   Hinweis: Wann ist $x = x^{-1}$?
2. Jede Primzahl p ist ein Teiler von $(p-1)! + 1$.

Exercise 3. Sei p eine Primzahl. Wir bezeichnen mit $\mathbb{F}_p$ den Körper mit p Elementen und mit $\mathbb{F}_p(X)$ den Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[X]$.

1. Berechne $[\mathbb{F}_p(X) : \mathbb{F}_p(X^p)]$ und $[\mathbb{F}_p(X) : \mathbb{F}_p(X^p)]_s$.
2. Für $K = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ und $L = \mathbb{F}_p(X, Y)$ berechne $[L : K]$ und $[L : K]_s$.
3. Zeige, dass $K \subseteq L$ keine einfache Körpererweiterung ist.

Exercise 4. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung in Charakteristik $p > 0$ und $\alpha \in L$. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. α ist separabel über K
2. $K(\alpha) = K(\alpha^p)$