

# ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG ALGEBRA 1

Wintersemester 2016/2017

## Aufgabenzettel 1

**Aufgabe 1 (10 Punkte).** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und

$$E_n := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_n \quad n \quad .$$

die  $n \times n$  – Einheitsmatrix. Betrachte die Menge

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^T = E_n\}$$

der *orthogonalen Matrizen*. Es bezeichnet hier  $A^T$  die Transponierte der Matrix  $A$ . Zeige, dass  $O(n, \mathbb{R})$  eine Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{R})$  ist.

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Zeige, dass jede Untergruppe  $G$  von  $(\mathbb{Z}, +)$  zyklisch ist, d.h.  $G$  wird von einem Element erzeugt.

Für die folgenden Aufgaben sei  $G$  eine endliche Gruppe mit neutralem Element  $e$ .

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** Sei  $G$  zyklisch.

- (1) Zeige: Für jedes  $g \in G$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $g^n = e$ .
- (2) Angenommen,  $H \subseteq G$  ist eine nicht-leere Teilmenge mit der Eigenschaft, dass  $HH \subseteq H$  (mit anderen Worten: Für alle  $g, h \in H$  gilt  $gh \in H$ ). Zeige, dass  $H$  eine Untergruppe von  $G$  ist.

**Aufgabe 4 (10 Punkte).** Sei  $G$  abelsch.

- (1) Zeige, dass  $\prod_{g \in G} g^2 = e$ .
- (2) Finde ein Beispiel für eine solche Gruppe mit  $\prod_{g \in G} g \neq e$ .