Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

# Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

## Aufgabenzettel 2

**Aufgabe 1 (10 Punkte).** Sei $G$ eine Gruppe. Angenommen, jedes Element von $G$ sei selbstinvers. Mit anderen Worten, es gelte $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeige, dass $G$ abelsch ist.

**Aufgabe 2 (10 Punkte).**
(1) Bestimme das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ aller Permutationen von $n$ Elementen.
(2) Sei $\Bbbk$ ein Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum. Bestimme das Zentrum der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ aller linearer Automorphismen von $V$.
Es darf angenommen werden, dass $\Bbbk = \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $q = |\mathbb{F}|$ die Anzahl seiner Elemente. Bestimme die Anzahl der $d$-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{F}^n$. Mit anderen Worten, betrachte

$$\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n) := \{U \subseteq \mathbb{F}^n \mid U \text{ Untervektorraum mit } \dim(U) = d\}$$

und bestimme $|\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n)|$. Betrachte dazu die naheliegende Wirkung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ auf der Menge $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{F}^n)$.

**Aufgabe 4 (10 Punkte).**
(1) Zeige den folgenden Satz von Burnside: Seien $G$ eine endliche Gruppe und $X$ eine endliche Menge, auf der $G$ wirkt. Für Elemente $g \in G$ bezeichnen wir mit $X^g := \{x \in X \mid g.x = x\}$ die Menge aller Fixpunkte von $g$. Dann ist die Anzahl der Bahnen von $G$ gleich

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X^g| \,.$$

*Hinweis.* Betrachte für den Beweis die Menge $R = \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$ und zähle diese auf zwei Arten ab.
(2) Betrachte die Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ auf $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Was ist der Erwartungswert der Anzahl Fixpunkte einer uniform zufällig gewählten Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$?

---

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **1.11.2016**, vor der Übung. Gutes Gelingen!