Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

# Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

## Aufgabenzettel 3

**Aufgabe 1 (10 Punkte).** Sei $C_n = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Unter einem *primitiven Element* von $C_n$ versteht man ein $h \in C_n$ mit $C_n = \langle h \rangle$. Die Anzahl der primitiven Elemente von $C_n$ wird mit $\varphi(n)$ bezeichnet, $\varphi$ heißt auch *Eulersche Phi-Funktion*.

(1) Unter welcher Bedingung an $k$ ist $g^k$ ein primitives Element?
(2) Entwickle eine Formel für $\phi(p)$, wenn $p$ eine Primzahl ist und berechne $\phi(15)$.
(3) Seien $T = (\mathrm{c}, \mathrm{c}^\sharp, \mathrm{d}, \mathrm{d}^\sharp, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{f}^\sharp, \mathrm{g}, \mathrm{g}^\sharp, \mathrm{a}, \mathrm{a}^\sharp, \mathrm{h})$ die verschiedenen Töne, die man auf einer Klaviertastatur spielen kann.

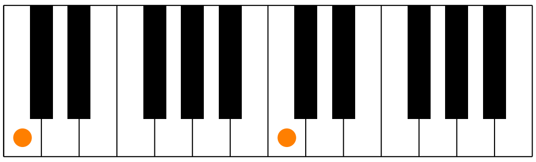

Abbildung 1: Klaviertastatur mit Markierung bei c

Ein verallgemeinerter Quintenzirkel ist eine Folge von Tönen, beginnend mit c, wobei aufeinanderfolgende Töne immer den gleichen Intervallabstand haben. Welche verallgemeinerten Quintenzirkel gibt es, in denen jeder Ton vorkommt?

**Aufgabe 2 (10 Punkte).** Sei $X$ eine endliche Menge mit $n = |X|$ Elementen und $\pi \in \mathfrak{S}_X$. Sei $H := \langle \pi \rangle$ die von $\pi$ erzeugte Untergruppe. Betrachte die kanonische Wirkung von $H$ auf $X$, welche durch $h.x := h(x)$ gegeben ist. Sei $m$ die Anzahl der $H$-Bahnen dieser Wirkung. Zeige: $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{n-m}$.

**Aufgabe 3 (10 Punkte).** Sei $G$ eine Gruppe.

(1) Zeige, dass $Z(G) \trianglelefteq G$.
(2) Für $g \in G$ betrachte die Konjugationsabbildung $\iota_g \in \mathrm{Aut}(G)$, welche durch $\iota_g(x) := gxg^{-1}$ gegeben ist. Wir nennen $\mathrm{Inn}(G) = \{\iota_g \mid g \in G\}$ die *inneren Automorphismen* von $G$. Zeige, dass $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.
(3) Zeige, dass $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

**Aufgabe 4 (10 Punkte).** Sei $G$ eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von $G$. Zeige: Wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist $G$ abelsch.

---

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **8.11.2016**, vor der Übung. Gutes Gelingen!