Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Peter Bürgisser — Fakultät II, Institut für Mathematik
Jesko Hüttenhain — Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 4

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und $H \leq G$. Es gelte weiterhin $H \cap N = \{1\}$ und $|G| = |N| \cdot |H|$. Zeige, dass $G = HN$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\mathscr{S}_p(G)$ die Menge der p-Sylow Untergruppen einer Gruppe G und $H \in \mathscr{S}_p(G)$. Zeige, dass $\left|\mathscr{S}_p(G)\right| = (G : N_G(H))$ gilt.

Im Folgenden sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Wir betrachten die Gruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) = \left\{ g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_p^{2\times 2} \;\middle|\; \det(g) = ad - bc = 1 \right\}. \tag{†}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(1) Beweise, dass $\left|\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)\right| = p^3 - p$. Verwende dazu, dass die Determinantenabbildung $\det : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p^\times$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(2) Zeige, dass $\mathfrak{S}_4$ keinen Normalteiler der Ordnung 2 enthält.

(3) Zeige, dass $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ und $\mathfrak{S}_4$ zwar die gleiche Anzahl Elemente haben, jedoch als Gruppen nicht isomorph sind.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Betrachte die Untergruppe

$$H := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_p^{2\times 2} \;\middle|\; x \in \mathbb{F}_p \right\} \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p) =: G$$

(1) Zeige, dass H eine p-Sylow Untergruppe von G ist.

(2) Bestimme die Anzahl der p-Sylow Untergruppen von G.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **15.11.2016**, vor der Übung. Gutes Gelingen!