Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeige: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 56.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe und seien $p_1, \dots, p_r$ die Primteiler von $n := |G| > 1$. Angenommen, für alle $i \in [r]$ existiert genau eine p_i-Sylow-Untergruppe G_i von G. Beweise, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi\colon G_1 \times \cdots \times G_r &\longrightarrow G \\ (g_1, \dots, g_r) &\longmapsto g_1 \cdots g_r \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $n \geq 3$. Zeige, dass die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ von der Menge aller 3-Zykel erzeugt wird.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit mindestens 3 Elementen, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \leq G$ die Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen. Wir bezeichnen mit $N_G(T)$ den Normalisator von T in G. Zeige:

(1) $N_G(T)$ besteht aus allen invertierbaren Matrizen, bei denen in jeder Spalte genau ein Element von 0 verschieden ist.

(2) Der Quotient $N_G(T)/T$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **22.11.2016**, vor der Übung. Gutes Gelingen!