Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 6

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeige:

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist semidirektes Produkt von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ und $\mathbb{K}^\times$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

(2) $\mathfrak{A}_4$ ist semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$, wobei $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Gib ein Beispiel für eine Gruppe G und einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$, so dass G nicht isomorph zu einem semidirekten Produkt $N \rtimes (G/N)$ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe und $H \trianglelefteq G$. Zeige, dass G genau dann auflösbar ist, wenn sowohl H als auch G/H auflösbar sind.

Aufgabe 4 (12 Punkte). Die *Kommutatoruntergruppe* $[G, G]$ einer Gruppe G ist definiert als die Untergruppe, welche von allen *Kommutatoren* $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ für $g, h \in G$ erzeugt wird. Zeige:

(1) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G und $G/[G, G]$ ist abelsch.

(2) Für alle $N \trianglelefteq G$ mit abelscher Faktorgruppe G/N gilt $[G, G] \leq N$.

Definiere nun rekursiv $D^0G := G$ und $D^{i+1}G := [D^iG, D^iG]$. Zeige:

(3) G ist genau dann auflösbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $D^nG = \{1\}$ gibt.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **29.11.2016**, vor der Übung. Gutes Gelingen!