Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 7

Aufgabe 1 (10 Punkte). Es sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. wir definieren

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] := \left\{ a + b\sqrt{d} \cdot \hat{\imath} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{C},$$

wobei $\hat{\imath}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Zeige:

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]^\times = \{\pm 1\}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\phi\colon R \to S$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen. Zeige:

(1) Wenn $J \subseteq S$ ein Ideal ist, so ist $\phi^{-1}(J) = \{x \in R \mid \phi(x) \in J\}$ ein Ideal von R.

(2) Wenn $P \subseteq S$ ein Primideal ist, so ist $\phi^{-1}(P)$ ebenfalls ein Primideal.

(3) Wenn ϕ surjektiv ist und $I \subseteq R$ ein Ideal, so ist $\phi(I)$ ein Ideal von S.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring. Ein Ideal $I \subseteq A$ heißt *maximal*, wenn $I \neq A$ und für jedes andere Ideal $J \subseteq A$ mit $I \subsetneq J$ bereits $J = A$ gilt.

(1) Der Ring A ist genau dann ein Körper, wenn $\{0\}$ ein maximales Ideal ist.

(2) Ein Ideal $I \subseteq A$ ist genau dann maximal, wenn A/I ein Körper ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei A ein kommutativer Ring, welcher einen Körper $\mathbb{K}$ als Unterring enthält. Dann kann A als $\mathbb{K}$-Vektorraum aufgefasst werden. Man nennt A auch eine kommutative $\mathbb{K}$-*Algebra*. Wir setzen voraus, dass dieser Vektorraum endlichdimensional ist. Zeige:

(1) Jedes Element von $A \setminus \{0\}$ ist entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

(2) Teil (1) ist im Allgemeinen falsch, wenn A nicht endlichdimensional ist.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **6.12.2016**, vor der Übung. Gutes Gelingen!