Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 8

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Für $x \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Zahl $v_p(x) := \max\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, p^k \text{ teilt } x\right\}$ wobei dies per Konvention $v_p(0) = \infty$ bedeutet. Zeige, dass

$$R_p := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, v_p(x) \geq v_p(y) \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ein Ring ist. Zeige weiterhin, dass R_p kein Körper ist, d.h. es gibt ein $a \in R_p$ mit $a \neq 0$, so dass $\frac{1}{a} \notin R_p$.

Aufgabe 2 (12 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Der Ring R heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal enthält. Zeige:

(1) R ist lokal genau dann, wenn $R \backslash R^\times$ ein Ideal in R ist.

(2) Sei R lokal und $I \subset R$ ein echtes Ideal. Dann ist R/I lokal.

(3) Der Ring R_p aus Aufgabe 1 ist lokal.

Aufgabe 3 (8 Punkte). Sei $\mathbb{F}$ ein Integritätsbereich mit endlich vielen Elementen.

(1) Zeige, dass $\mathbb{F}$ ein Körper ist, d.h. $\mathbb{F}^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

(2) Sei $p \in \mathbb{N}$ die kleinste positive Zahl, so dass für alle $x \in \mathbb{F}$ gilt: $p \cdot x = 0$. Zeige, dass p eine Primzahl ist.

Man nennt p die *Charakteristik* von $\mathbb{F}$.

Aufgabe 4 (12 Punkte). Seien A und B kommutative Ringe. Seien $I \subseteq A$ und $J \subseteq B$ jeweils Ideale. Zeige:

(1) Das Produkt $I \times J$ ist ein Ideal von $A \times B$.

(2) Jedes Ideal von $A \times B$ ist von dieser Form.

(3) Es existiert ein Isomorphismus $A/I \times B/J \cong (A \times B)/(I \times J)$.

(4) Unter welcher Bedingung an I und J ist $I \times J$ ein Primideal von $A \times B$?

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **13.12.2016**, vor der Übung. Gutes Gelingen!