Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 10

Aufgabe 1 (8 Punkte). Sei $\mathbb{Z}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Zerlege das Polynom $f := 1 + X^2 + X^3 + X^6 + X^7 + X^9 + X^{11} \in \mathbb{Z}_2[X]$ in quadratfreie Faktoren.

Aufgabe 2 (12 Punkte). Sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit. Wir betrachten den *Ring der Gaußschen Zahlen* $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ zusammen mit der Norm

$$\delta(a + bi) := |a + bi|^2 = a^2 + b^2.$$

(1) Zeige, dass $\delta(x \cdot y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ gilt. Zeige ferner, dass jedes $x \in \mathbb{Z}[i]$ ein Teiler von $\delta(x) \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[i]$ ist.

(2) Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Euklidischer Ring bezüglich δ ist.

(3) Beschreibe die Einheiten in $\mathbb{Z}[i]$.

(4) Zeige, dass $x \in \mathbb{Z}[i]$ irreduzibel ist, wenn $\delta(x)$ eine Primzahl ist. Gib ein Beispiel für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$, die in $\mathbb{Z}[i]$ nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei R ein Hauptidealbereich, der außerdem lokal ist, d.h. R hat genau ein maximales Ideal. Siehe auch Aufgabenblatt 8. Zeige, dass R ein Euklidischer Ring ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Ein *Lateinisches Quadrat* der Ordnung p ist eine Matrix $A \in \mathbb{Z}_p^{p \times p}$, in welcher jede Zeile und jede Spalte jeweils alle Elemente von $\mathbb{Z}_p$ enthalten. Wir bezeichnen den Eintrag von A an der Stelle (i, j) mit $A(i, j)$. Zwei lateinische Quadrate A und B heißen *orthogonal* wenn

$$\{(A(i, j), B(i, j)) \mid 1 \leq i, j \leq p\} = \mathbb{Z}_p^2.$$

Konstruiere eine Folge $A_1, \ldots, A_{p-1}$ von paarweise orthogonalen Lateinischen Quadraten. Definiere dazu die Einträge $A_k(i, j)$ als einen arithmetischen Ausdruck in i, j und k, wobei diese Indizes als Elemente von $\mathbb{Z}_p = \{1, \ldots, p - 1, p = 0\}$ aufgefasst werden.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **10.1.2017**, vor der Übung. Gutes Gelingen!