Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 11

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeige, dass das Polynom $1 + X + X^4 + X^5 + X^8 \in \mathbb{Z}_2[X]$ quadratfrei ist und berechne seine irreduziblen Faktoren mit Berlekamps Algorithmus.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für ein Polynom $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ und einen Punkt $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ bezeichnen wir mit $f(a)$ das Bild von f unter dem Auswertungshomomorphismus $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbb{K}$, welcher $X_i \mapsto a_i$ abbildet. Zeige:

(1) Wenn $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente hat und $f(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{K}^n$, dann ist f das Nullpolynom. Schlussfolgere, dass zwei Polynome genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Funktionen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definieren.

(2) Finde ein Beispiel für einen endlichen Körper $\mathbb{K}$ und zwei verschiedene Polynome $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in \mathbb{K}^n$.

Wir betrachten im Polynomring $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ den *homogenen Anteil* vom Grad d

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_d := \left\{ \textstyle\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \,\middle|\, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = d \right\}.$$

Man nennt die Elemente von $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_d$ auch *homogen* vom Grad d.

Aufgabe 3 (12 Punkte). Sei $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 0$. Für $k \in [n]$ definieren wir die k-te partielle Ableitung als die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \partial_k \colon \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] &\longrightarrow \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \\ X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} &\longmapsto \alpha_k \cdot X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k - 1} \cdots X_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Da ∂_k auf der Basis der Monome definiert wurde, ist somit ein Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen definiert.

(1) Zeige für $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ die *Leibnizregel* $\partial_k(fg) = f\partial_k(g) + \partial_k(f)g$.
Hinweis: Reduziere zunächst auf den Fall, dass f und g Monome sind.

(2) Sei $d > 0$. Zeige, dass $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ genau dann homogen vom Grad d ist, wenn die *Eulersche Formel* $\sum_{k=1}^n X_k \partial_k(f) = d \cdot f$ erfüllt ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte). Sei $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_d$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Zeige: Wenn $f = f_1 \cdots f_r$ sich als Produkt von Polynomen $f_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ schreiben lässt, so sind die f_i ebenfalls homogen.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **17.1.2017**, vor der Übung. Gutes Gelingen!