Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 12

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeige mit Hilfe des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(1) $X^7 - 6X^5 + 9X^2 + 12X - 15 \in \mathbb{Z}[X]$

(2) $Y^3 + XY^2 + X^2Y + X^2 + X \in \mathbb{Q}[X, Y]$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Betrachte das Polynom $f := X^p - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ für p prim.

(1) Zeige, dass $X - 1$ ein Teiler von f ist und berechne das Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$, welches $f = (X - 1) \cdot g$ erfüllt.

(2) Sei $t : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ der Automorphismus gegeben durch $t(X) := X + 1$. Wende das Eisenstein-Kriterium auf $t(g)$ an und schlussfolgere, dass g irreduzibel ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei $R := \mathbb{K}[X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ der Polynomring in den Variablen X_{ij} für $1 \leq i, j \leq n$, über einem Körper $\mathbb{K}$. Wir bezeichnen mit $\det_n \in R$ die Determinante der Matrix $(X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in R^{n \times n}$. Zeige, dass $\det_n$ irreduzibel ist. Gehe dazu wie folgt vor: Führe Induktion nach n. Fasse im Induktionsschritt $\det_n$ als Polynom in X_{nn} auf. Bestimme den Grad von $\det_n$ in X_{nn} und zeige mittels Induktionsvoraussetzung, dass dieses Polynom primitiv ist.

In der folgenden Aufgabe wird die Konstruktion des Quotientenkörpers verallgemeinert. Sei A ein (kommutativer) Integritätsbereich. Eine *multiplikative Teilmenge* von A ist eine Menge $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und $ab \in S$ für $a, b \in S$.

Aufgabe 4 (3+3+4 Punkte).

(1) Betrachte auf $A \times S$ die Äquivalenzrelation $(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow ab' = a'b$. Zeige, dass die Äquivalenzklassen eine wohldefinierte Ringstruktur aufweisen. Wir nennen diesen Ring $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$ die *Lokalisierung von A nach S*.

(2) Sei K der Quotientenkörper von A. Zeige, dass

$$S^{-1}A \cong \left\{ \tfrac{a}{s} \in K \,\middle|\, a \in A,\, s \in S \right\} \subseteq K$$

als Unterring von K aufgefasst werden kann, welcher A enthält. Gebe ein S an, so dass $K = S^{-1}A$.

(3) Sei $a \in A$. Betrachte das multiplikative System $S_a := \left\{ a^k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$. Zeige, dass dann $S_a^{-1}A \cong A[X]/(aX - 1)$.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **24.1.2017**, vor der Übung. Gutes Gelingen!