Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 13

Sei stets R ein faktorieller Integritätsbereich mit $\mathrm{char}(R) \neq 2$.

Aufgabe 1 (10 Punkte). Drücke die folgenden Polynome in $R[X_1, X_2, X_3]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen σ_1, σ_2 und σ_3 aus:

(1) $Q := X_1^3 + 3X_1^2X_2 + 3X_1^2X_3 + 3X_1X_2^2 + 3X_1X_3^2 + X_2^3 + 3X_2^2X_3 + 3X_2X_3^2 + X_3^3$

(2) $P := X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$

Aufgabe 2 (12 Punkte). Betrachte die bekannte Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ auf dem Polynomring $A := R[X_1, \ldots, X_n]$. Ein Polynom $f \in A$ heißt **antisymmetrisch** wenn $\forall \pi \in \mathfrak{S}_n \colon \pi.f = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot f$. Zeige:

(1) Die *Vandermonde-Determinante*

$$\delta := \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (X_i - X_j) \qquad (\dagger)$$

ist antisymmetrisch.

(2) Jedes antisymmetrische Polynom f ist von der Form $f = g\delta$ mit einem symmetrischen Polynom g.

(3) Wenn $f \neq 0$ antisymmetrisch ist, so ist $\deg(f) \geq \frac{n^2-n}{2}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $R = \mathbb{K}$ ein Körper und $A := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Die bekannte Wirkung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ auf A induziert eine Wirkung der *alternierenden Gruppe* $\mathfrak{A}_n = \{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid (-1)^\pi = 1\} \subseteq \mathfrak{S}_n$. Betrachte nun den Unterring $A^{\mathfrak{A}_n} = \{f \in A \mid \forall \pi \in \mathfrak{A}_n \colon \pi.f = f\}$ aller Polynome, welche invariant unter $\mathfrak{A}_n$ sind. Zeige:

$$\forall f \in A^{\mathfrak{A}_n} \colon \exists g, h \in A^{\mathfrak{S}_n} \colon f = h + g\delta,$$

wobei δ wie in ($\dagger$) definiert ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte). Für $\alpha \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $t_\alpha \colon \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ den Homomorphismus, der auf $\mathbb{C}$ die Identität ist und $t_\alpha(X) = X + \alpha$ erfüllt. Zeige, dass $\mathrm{disc}(f) = \mathrm{disc}(t_\alpha(f))$ für jedes normierte Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ und jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt.

(Bemerkung: Man kann $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen Integritätsbereich ersetzen, dazu benötigt man jedoch etwas mehr Theorie als bisher besprochen.)

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **31.1.2017**, vor der Übung. Gutes Gelingen!