Prof. Dr. Peter Bürgisser
Jesko Hüttenhain

Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 3-2

Übungen zur Vorlesung Algebra 1

Wintersemester 2016/2017

Aufgabenzettel 14

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Integritätsbereich und $f, g, h \in R[X]$ nicht-konstante, normierte Polynome. Zeige:

(1) $\operatorname{res}(fg, h) = \operatorname{res}(f, h) \cdot \operatorname{res}(g, h)$,

(2) $\operatorname{disc}(fg) = \operatorname{disc}(f) \cdot \operatorname{disc}(g) \cdot \operatorname{res}(f, g)^2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes kubisches Polynom. Zeige, dass f genau dann drei verschiedene, reelle Nullstellen hat, wenn $\operatorname{disc}(f) > 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine endliche Körpererweiterung. Man zeige:

(1) Für $a \in \mathbb{L}$ ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ gleich dem Minimalpolynom der $\mathbb{K}$-linearen Abbildung $\phi_a \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, $x \mapsto a \cdot x$.

Hinweis: Es wird der Satz von Cayley-Hamilton aus der linearen Algebra als bekannt vorausgesetzt.

(2) Wenn $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$, so ist das Minimalpolynom von a über $\mathbb{K}$ bereits gleich dem *charakteristischen* Polynom von ϕ_a.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Betrachte den Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(1) Bestimme den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ und bestimme eine Basis von $\mathbb{K}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

(2) Verwende Aufgabe 3, um das Minimalpolynom von $a := \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{K}$ über $\mathbb{Q}$ zu bestimmen.

Die Abgabe erfolgt bis **Dienstag**, den **7.2.2017**, vor der Übung. Gutes Gelingen!