Technische Universität Berlin
Fakultät II - Institut für Mathematik

Bachelorarbeit
im Studiengang Mathematik

Stabilisator der Determinante und maximal lineare Teilräume

vorgelegt von: Philipp Reichenbach

Matrikelnummer: 346737

Betreuer/Gutachter: Prof. Dr. Peter Bürgisser

Zweitgutachter: Prof. Dr. Jörg Liesen

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ohne unerlaubte fremde Hilfe und ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung versichert an Eides statt:

Berlin, den

Philipp Reichenbach

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der geometrischen Komplexitätstheorie spielt die Determinante bzw. das Determinantenpolynom eine herausragende Rolle. Ein besseres geometrisches und/oder strukturelles Verständnis der Determinante zieht meistens neue Resultate in diesem mathematischen Teilgebiet nach sich. Dabei werden häufig Methoden aus der Darstellungstheorie, der Algebraischen Geometrie und der Kombinatorik angewandt. Mittel- bis langfristig gesehen (so die Hoffnung) kann die geometrische Komplexitätstheorie entscheidend zu einer Lösung des **P vs. NP** Problems oder zumindest etwas schwächerer Formulierungen beitragen! Aus dieser Motivation heraus beschäftigen sich viele Komplexitätstheoretiker intensiv mit der Determinante.

Wichtige, grundlegende Ergebnisse zur Determinante werden in dieser Arbeit ausführlich vorgestellt und bewiesen. Für elementare, strukturelle Einsichten sind die *Symmetrien* der Determinante bzw. des Determinantenpolynoms interessant. Das heißt, es wird untersucht, welche linearen Abbildungen die Determinante invariant lassen. Diese bilden eine Gruppe - den ***Stabilisator der Determinante***, welcher in Theorem 2.14 bestimmt wird. Des Weiteren wird das verwandte Problem betrachtet, welche bijektiven, linearen Abbildungen die Nullstellenmenge Σ_n der Determinante - also die Menge der singulären Matrizen - invariant lassen. Diese bilden ebenfalls eine Gruppe - den ***Stabilisator von*** Σ_n, der in Theorem 2.13 charakterisiert wird. Die Betrachtung des Stabilisators von Σ_n ist naheliegend, denn eine Lösung dieses Problems liefert den Stabilisator der Determinante als Korollar. Außerdem ist die durch die Determinante gegebene Hyperfläche Σ_n beim Einsatz algebraisch-geometrischer Methoden von besonderem Interesse und somit sicherlich auch der Stabilisator. Für ein besseres Verständnis der geometrischen Eigenschaften von Σ_n sorgen die in Σ_n enthaltenen Vektorräume. Dabei genügt es die (inklusions-)***maximalen linearen Teilräume*** zu charakterisieren. Dies ist jedoch ein sehr schwieriges, noch nicht abgeschlossenes Problem (siehe 5.2 Ausblick). Stattdessen werden zumindest die ***linearen Teilräume maximaler Dimension*** von Σ_n in Abschnitt 2.4 vollständig charakterisiert.

Interessanterweise stehen diese drei Themen - Stabilisator der Determinante, der Hyperfläche Σ_n und die linearen Teilräume maximaler Dimension von Σ_n - in einem sehr schönen Zusammenhang. Dies zeigt die Abhandlung [7] von Dieudonné, welche als Ausgangspunkt für diese Arbeit dient(e). Das Vorgehen von Dieudonné in [7] wird in dieser Arbeit detailliert aufgezeigt. Zur Charakterisierung der linearen Teilräume maximaler Dimension von Σ_n wird jedoch nicht [7] sondern [9] von Fillmore et. al. verwendet (mehr dazu siehe Abschnitt 2.4). Die Charakterisierung der beiden Stabilisatoren ist eine Problemstellung aus dem (in den letzten Jahrzehnten recht populären und gut untersuchten) Forschungsgebiet der ***Linear Preserver Problems*** (siehe 5.2 Ausblick). Heutzutage gilt Frobenius als erster Mathematiker, der solch eine Fragestellung untersuchte. In [12] aus dem Jahr 1897 bestimmte er den Stabilisator der Determinante über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Dieudonné konnte die Ergebnisse von Frobenius sogar über allgemeinen Körpern beweisen. Auch nach Dieudonnés Resultat wurde an diesem Problem weiter gearbeitet. Andere Arbeiten, in denen ebenfalls der Stabilisator der Determinante bestimmt wird, sind z. B. [20] von Marcus und Moyls sowie [22] von Minc. Beide Arbeiten kommen mit

Mitteln der Linearen Algebra aus und geben elementarere Beweise als Dieudonné. Allerdings arbeiten Marcus und Moyls „nur“ über $\mathbb{C}$ und Minc über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Meines Erachtens eignen sich [20] und [22] für einen schnellen Einstieg, jedoch ist Dieudonnés Beweis lehrreicher und interessanter - besonders aus geometrischer Sicht. Dieudonnés entscheidende Schritte sind wichtige geometrische Ideen, die auch in anderen Beweisen modifiziert angewandt wurden und andere MathematikerInnen bereits inspiriert haben und in Zukunft vielleicht auch noch inspirieren werden (siehe Abschnitt 5.1). Deshalb liegt der Fokus dieser Arbeit auch auf der detaillierten Darstellung dieser Ideen, wie sie unter anderem in den Abschnitten 2.3, 2.4, 3.2, 3.3 und Kapitel 4 zu finden sind.

Zum ***Aufbau der Arbeit***: Zu Beginn werden die wichtigsten Notationen eingeführt und einige Begriffe und Sätze der Linearen Algebra wiederholt, die mehrfach angewendet werden. In Abschnitt 2.2 werden anschließend die beiden wichtigen Theoreme 2.13 bzw. 2.14 formuliert und der Stabilisator der Determinante bestimmt. Die weiteren Abschnitte der Arbeit dienen der Vorbereitung und des Beweises von Theorem 2.13 nach Dieudonné. Dazu werden in Abschnitt 2.3 alle Links- und Rechtsideale vom Ring der quadratischen Matrizen charakterisiert. Danach beschäftigt sich 2.4 mit den linearen Teilräumen maximaler Dimension von Σ_n, welche sich als maximale Links- bzw. maximale Rechtsideale herausstellen. Die benötigten Methoden aus der projektiven Geometrie werden in Kapitel 3 eingeführt. Dabei dient Abschnitt 3.1 der Wiederholung der wichtigsten Grundlagen. Mit diesem Wissen wird dann Theorem 2.13 für den Fall $n = 2$ bewiesen, welcher gesondert betrachtet werden muss. Das liegt daran, dass Dieudonnés Vorgehen die Voraussetzung $n \geqslant 3$ benötigt, weil er den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie verwendet. Dieser wird in 3.3 eingeführt und bewiesen. Danach findet die Arbeit ihren Höhepunkt in Kapitel 4. Dort werden die gesponnenen Fäden zusammen geführt und Dieudonnés Beweis für $n \geqslant 3$ präsentiert. Zum Schluss werden die wichtigsten Resultate und die beiden hauptsächlich verwendeten Arbeiten [7] und [9] einer Wertung unterzogen (5.1) und es wird ein Ausblick (5.2) gegeben.

Abschließend sei bemerkt, dass zur Vereinfachung der Argumente in Abschnitt 2.4 der zugrunde liegende Körper einer gewissen Größe genügen muss. Wem die Resultate für unendliche Körper genügen, möge die Arbeit der Einfachheit halber unter dieser General-Voraussetzung lesen. Im Fall endlicher Körper ist Satz 2.36 der einzige Schritt zum Beweis der Theoreme 2.13 und 2.14, der eine gewisse Körpergröße benötigt. Man beachte dazu Bemerkung 2.37, wonach die Voraussetzung fallen gelassen werden kann. Sie wird in den darauf aufbauenden Schritten deshalb auch nicht mehr erwähnt.

1.1 Danksagung

Als Erstes möchte ich mich bei Sonia Ianakova bedanken, die sich trotz ihrer fachlichen Unkenntnis bereit erklärt hat, mir eine *reading translation* der französischen Abhandlung [7] ins Deutsche zu erstellen. Diese Übersetzung hat mir den Zugang zu Dieudonnés Arbeit sehr erleichtert und die Sprachbarrieren meinerseits umgangen.
Meinem Betreuer Prof. Bürgisser danke ich für die vielen detaillierten Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge sowie den großen Vertrauensvorschuss einem seinerseits relativ unbekannten Studenten so schnell ein herausforderndes und schönes Thema für eine Bachelor-Arbeit zu geben. Bei Prof. Liesen bedanke ich mich für die schnellen, kurzen Feedbacks zum jeweiligen aktuellen Stand der Arbeit und den Links zu Online-Archiven, die mir einen Zugang zu Frobenius Arbeit [12] ermöglicht haben.
Ein weiterer Dank geht an Jesko Hüttenhain und Pierre Lairez, die mit mir in privaten Sprechstunden noch offene Fragen besprochen und mir neue Anreize gegeben haben. Auch wenn ihre interessanten Ideen zum dritten Schritt im Beweis von Theorem 4.2 letztlich nicht verwendet wurden, haben sie mir dennoch das verloren gegangene Vertrauen zurück gegeben, dass das Ziel dieses Schrittes an sich stimmt.
Für das Korrekturlesen hinsichtlich Rechtschreibung und Grammatik danke ich meiner Mama.
Abschließend möchte ich mich ganz herzlich bei meiner gesamten Familie bedanken, die mich in meinem eingeschlagenen Weg bestärkt und eine sehr wichtige Stütze in meinem Leben war, ist und auch in Zukunft sein wird. In besonderem Maße gilt dies für meine Eltern, die mir in vielerlei Hinsicht den Rücken frei gehalten und gestärkt haben. Sie haben mir auf diese Weise eine derart intensive Beschäftigung mit der Schule, dem Studium und meinem Tutorenjob überhaupt erst ermöglicht.

2 Methoden der Linearen Algebra

2.1 Notation und grundlegende Begriffe

In diesem Abschnitt sollen zunächst die in dieser Arbeit verwendeten Notationen vorgestellt werden. Anschließend werden einige grundlegende Konzepte aus der Linearen Algebra wiederholt, die besonders häufig benutzt werden.

In der gesamten Arbeit ist K ein Körper und $K^{m,n}$ bezeichnet den K-Vektorraum der $m \times n$ - Matrizen. Dabei sind m und n aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, wobei wir die Konvention treffen, dass die Null *kein* Element von $\mathbb{N}$ ist. Zur genauen Unterscheidung steht $\mathbb{N}_0$ für die Menge der natürlichen Zahlen *einschließlich* der Null. Generell ist n stets aus $\mathbb{N}$.
Eine herausragende Rolle in dieser Arbeit nimmt der Raum der singulären Matrizen

$$\Sigma_n := \{A \in K^{n,n} \mid \det(A) = 0\}$$

ein, wobei $\det(A)$ die Determinante der Matrix A ist. Das Komplement - die Gruppe der invertierbaren Matrizen - wird mit $GL_n(K)$ bezeichnet.
K^n ist der Vektorraum der n-Tupel über K und in Verbindung mit Matrizen (z. B. bei der Matrixmultiplikation) fassen wir K^n mittels kanonischer Isomorphie als Spaltenraum $K^{n,1}$ auf. Als Standardbasis wählen wir die Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, wobei e_j das Tupel mit j-tem Eintrag 1 und allen anderen Einträgen 0 ist.
Für $K^{n,n}$ ist die hier verwendete Standardbasis $\{E_{i,j} \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Dabei ist $E_{i,j} \in K^{n,n}$ mit 1 im Eintrag (i, j) und sonst Nullen. Die Einheitsmatrix aus $K^{n,n}$ wird mit I_n bezeichnet. Zudem ist es ab und zu hilfreich $K^{n,n}$ als K^{n^2} aufzufassen. Dies wird des Öfteren implizit vorgenommen, jedoch nur unter Verwendung folgender bijektiver, linearer Abbildung

$$\kappa_n : K^{n,n} \to K^{n^2},\ A = (a_{i,j}) \mapsto (a_{1,1}, \ldots, a_{1,n},\ \ldots\ , a_{n,1}, \ldots, a_{n,n})\,.$$

Hierbei ist $a_{i,j}$ der Eintrag von A an der Stelle (i, j) und κ_n hängt - lax gesprochen - die Zeilen von A aneinander.
Im Folgenden sind $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ stets K-Vektorräume. Eine **Gerade** von $\mathcal{V}$ ist in dieser Arbeit stets ein eindimensionaler Unterraum. Ist $\mathcal{V}$ n-dimensional, so nennen wir einen $(n-1)$ - dimensionalen Unterraum von $\mathcal{V}$ eine **Hyperebene**. Den Raum der linearen Abbildungen von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{W}$ bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ und die Gruppe der linearen, bijektiven Abbildungen $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ wie üblich mit $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Für Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{V}$ wird die Menge aller Linearkombinationen mit $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ oder kürzer mit $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ bezeichnet.

Nach dieser Einführung der in dieser Arbeit verwendeten Notationen kommen wir zu einigen wichtigen Begriffen der Linearen Algebra. Als Erstes führen wir die in der Einleitung bereits verwendeten Begriffe formal ein.

Definition 2.1: Sei $M \subseteq \mathcal{V}$ mit $0 \in M$ und sei $\mathcal{V}$ endlichdimensional.
Ein Untervektorraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$ heißt **maximal linearer Teilraum** von M, falls $U \subseteq M$ und für alle Vektorräume $\mathcal{W}$ gilt, dass aus $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \subseteq M$ schon $\mathcal{U} = \mathcal{W}$ folgt.
$\mathcal{U}$ heißt **linearer Teilraum maximaler Dimension** von M, falls $\mathcal{U} \subseteq M$ und $\dim \mathcal{U} = \max\{\dim \mathcal{W} \mid \mathcal{W} \subseteq M \text{ ein Vektorraum}\}$ gilt.

Die Wohldefiniertheit ist durch $0 \in M$ und durch die endliche Dimension von $\mathcal{V}$ gesichert. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen diesen Begriffen:

Proposition 2.2: *Sei $\mathcal{V}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum und $M \subseteq \mathcal{V}$ mit $0 \in M$. Ist $\mathcal{U}$ ein linearer Teilraum maximaler Dimension von M, dann ist $\mathcal{U}$ ein maximal linearer Teilraum von M.*

Beweis. Sei dazu $\mathcal{W}$ ein Vektorraum mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \subseteq M$. Nach Definition von $\mathcal{U}$ gilt $\dim \mathcal{U} \geqslant \dim \mathcal{W}$. Da aber $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ gilt ebenso $\dim \mathcal{U} \leqslant \dim \mathcal{W}$. Aus der Dimensionsgleichheit und der Teilmengenbeziehung von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ folgt schließlich $\mathcal{U} = \mathcal{W}$. □

In Abschnitt 2.4 werden wir uns vor allem mit linearen Teilräumen maximaler Dimension von Σ_n beschäftigen. Beispiel 2.40 wird zudem zeigen, dass i.A. nicht jeder maximal lineare Teilraum von Σ_n ein linearer Teilraum maximaler Dimension von Σ_n ist. Das heißt die Umkehrung von Proposition 2.2 ist i.A. falsch.
Zur leichten Schreibvereinfachung kommen wir zu folgender

Definition 2.3: Einen Vektorraum $\mathcal{V}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{V} \subseteq \Sigma_n$ nennen wir **singulär**. Entsprechend der Spezialfälle aus Definition 2.1 nennen wir $\mathcal{V}$ gegebenenfalls maximal singulär bzw. singulär von maximaler Dimension.

In den weiteren Betrachtungen von Kapitel 2 wird das Konzept des Dualraumes mehrmals eine wichtige Rolle spielen. Deshalb wiederholen wir nun kurz die hier benötigten Begriffe und Ergebnisse.

Definition 2.4: $\mathcal{V}^* := \mathscr{L}(\mathcal{V}, K)$ heißt **Dualraum** von $\mathcal{V}$ und ist bekanntermaßen selbst ein K-Vektorraum.
Für einen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$ heißt $\mathcal{U}^0 := \{f \in \mathcal{V}^* \mid \forall u \in \mathcal{U} : f(u) = 0\}$ der **Annihilator** von $\mathcal{U}$. Analog ist für einen Unterraum $\mathcal{W}$ von $\mathcal{V}^*$ der Annihilator gegeben durch $\mathcal{W}^0 := \{v \in \mathcal{V} \mid \forall f \in \mathcal{W} : f(v) = 0\}$.

Proposition 2.5 ([18, S. 245])**:** *Sei $\mathcal{V}$ endlichdimensional und seien $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{W}$ Unterräume von $\mathcal{V}$ bzw. $\mathcal{V}^*$. Dann gilt*

1. *$\mathcal{U}^0$ bzw. $\mathcal{W}^0$ ist ein Unterraum von $\mathcal{V}^*$ bzw. $\mathcal{V}$.*
2. $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^0 = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^0$.
3. $(\mathcal{U}^0)^0 = \mathcal{U}$ *und* $(\mathcal{W}^0)^0 = \mathcal{W}$

Der 3. Punkt wird in [18] nicht erwähnt, folgt jedoch leicht aus 2. und den Teilmengenbeziehungen $\mathcal{U} \subseteq (\mathcal{U}^0)^0$ und $\mathcal{W} \subseteq (\mathcal{W}^0)^0$. Alternativ findet man die Aussagen für $\mathcal{U}$ in [10, S. 333f. und S. 337]. Für $\mathcal{W}$ folgen sie dann sofort durch zusätzliches Dualisieren und der kanonischen Isomorphie von $\mathcal{V}$ und dem Bidualraum $\mathcal{V}^{**}$ (siehe [10, S. 336]).

Definition 2.6: Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ Vektorräume und $\beta : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to K$ eine Bilinearform. Wir sagen $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ist ein **duales Raumpaar** bezüglich β, falls β nicht ausgeartet ist. Das heißt es gilt

$$(\forall\, v \in \mathcal{V} :\ \beta(v, w) = 0) \ \Rightarrow\ w = 0 \quad \text{und}$$
$$(\forall\, w \in \mathcal{W} :\ \beta(v, w) = 0) \ \Rightarrow\ v = 0.$$

Ist zusätzlich $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, so nennen wir $\mathcal{V}$ **selbstdual** bezüglich β.

Satz 2.7 ([29, S. 125, Satz 4.6.9])**:** *Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ endlichdimensionale Vektorräume, die ein duales Raumpaar bezüglich der Bilinearform β bilden. Dann ist die Abbildung $\beta_1 : \mathcal{W} \to \mathcal{V}^*,\ w \mapsto \beta_w = \beta(\,\cdot\,, w)$ ein Isomorphismus.*

Dieser Satz erlaubt es uns, den Dualraum $\mathcal{V}^*$ mit dem Vektorraum $\mathcal{W}$ unter Verwendung von β zu identifizieren. Ein übliches Beispiel ist die Isomorphie $(K^{m,n})^* \cong K^{n,m}$ unter Verwendung der Spur einer Matrix.

Lemma 2.8: *Die Bilinearform $\beta : K^{m,n} \times K^{n,m} \to K,\ (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$ ist nicht ausgeartet. Damit folgt $(K^{m,n})^* \cong K^{n,m}$ nach Satz 2.7.*

Beweis. Sei $A = (a_{l,k}) \in K^{m,n}$, sodass $\mathrm{Spur}(AB) = 0$ für alle $B \in K^{n,m}$ gilt. Seien $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant m$ sowie $B_{i,j} = (b_{k,l}) \in K^{n,m}$ mit (i, j)-tem Eintrag 1 und allen anderen Einträgen 0. Dann gilt

$$0 = \mathrm{Spur}(AB_{i,j}) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{l,k} b_{k,l} = a_{i,j} \cdot 1 = a_{i,j}$$

nach Definition von $B_{i,j}$. Da i, j beliebig gewählt werden können, folgt $A = 0$.
Sei andererseits $B \in K^{n,m}$, sodass $\mathrm{Spur}(AB) = 0$ für alle $A \in K^{m,n}$ gilt. Es folgt $B = 0$ mit der Rechenregel $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ und dem 1. Teil des Beweises. □

In Abschnitt 2.4 wird die Methode von Satz 2.7 in einer entscheidenden Überlegung auf ein ganz bestimmtes Beispiel angewendet. Dieses wird nun besprochen.

Beispiel 2.9: Die Selbstdualität eines Matrizenraumes
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt und sei $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Wir betrachten den Unterraum

$$\mathcal{X} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \in K^{n,n} \,\middle|\, X \in K^{n-r,r},\ Y \in K^{r,n-r} \right\}$$

von $K^{n,n}$ und die Bilinearform $\beta : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to K,\ (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(BA)$. Es soll nun gezeigt werden, dass β nicht ausgeartet ist.
Sei dafür $B \in \mathcal{X}$ mit zugehörigen Matrizen $X \in K^{n-r,r},\ Y \in K^{r,n-r}$, sodass $\mathrm{Spur}(BA) = 0$ für alle $A \in \mathcal{X}$ gilt. Insbesondere gilt für alle $A_1 \in K^{n-r,r}$ und alle $A_2 \in K^{r,n-r}$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & YA_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Spur}(YA_1) \quad \text{und} \\ 0 &= \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur} \begin{pmatrix} XA_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Spur}(XA_2). \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.8 folgt $Y = 0$ und $X = 0$, also $B = 0$.
Aus der Rechenregel $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ folgt analog zum Beweis von Lemma 2.8, dass β nicht ausgeartet ist. Damit ist $\mathcal{X}$ selbstdual bezüglich β.
Satz 2.7 erlaubt es uns somit $\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \subseteq K^{n,n}$ (bis auf Isomorphie) in Abschnitt 2.4 zu schreiben. Dabei ist $F(A) = \mathrm{Spur}(FA)$ für $F \in \mathcal{X}^*$ und $A \in \mathcal{X}$.

Natürlich werden in den folgenden Abschnitten viele weitere Resultate aus dem Grundkanon der Linearen Algebra verwendet. All diese hier noch einmal explizit aufzuführen, würde allerdings den Rahmen der Arbeit sprengen. Deshalb sei nur kurz auf Standardwerke wie [10], [18] und [29] verwiesen, in denen dieses grundlegende Wissen zu finden ist.

2.2 Der Stabilisator der Determinante

Wir kommen nun zu einem der Hauptthemen dieser Arbeit: Es soll charakterisiert werden, welche linearen Abbildungen $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$ die Eigenschaft

$$\det(f(A)) = \det(A) \quad \text{für alle } A \in K^{n,n} \tag{1}$$

erfüllen - wir sagen dann: f lässt die Determinante invariant. Zu Beginn soll herausgearbeitet werden, dass all diese linearen Abbildungen eine Gruppe bilden. Genauer gesagt, werden wir zeigen, dass es sich um eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}(K^{n,n}), \circ)$ handelt. Dafür zeigen wir folgendes

Lemma 2.10: *Sei $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$ eine lineare Abbildung mit (1). Dann ist f bijektiv und es gilt $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$.*

Beweis. Da f ein Endomorphismus ist, ist die Bijektivität äquivalent zur Injektivität. Sei also $A \in K^{n,n}$ mit $f(A) = 0$. Dann ist $A \in \Sigma_n$, da $\det(A) = \det(f(A)) = \det(0) = 0$ gilt. Somit ist $r := \mathrm{Rang}(A) < n$, $r \in \mathbb{N}_0$. Folglich existieren $M, N \in GL_n(K)$ die A in Rangnormalform bringen, das heißt

$$MAN = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n,n}.$$

Weiter gilt für alle $X \in K^{n,n}$

$$\begin{aligned} \det(M^{-1}XN^{-1}) &= \det\left(f(M^{-1}XN^{-1})\right) = \det\left(f(A) + f(M^{-1}XN^{-1})\right) \\ &= \det\left(f(A + M^{-1}XN^{-1})\right) = \det(A + M^{-1}XN^{-1}) \\ &= \det(M^{-1})\det(MAN + X)\det(N^{-1})\,. \end{aligned}$$

Multiplikation mit $\det(M)\det(N)$ zeigt $\det(MAN + X) = \det(X)$. Sei nun

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \in K^{n,n}.$$

Dann gilt $\det(MAN + X) = \det(I_n) = 1$, allerdings auch $\det(X) = 0$ sofern $r > 0$; $\det(X) = 1$ gilt nur für $r = 0$. Somit folgt notwendigerweise $r = 0$ und damit $A = 0$. Dies zeigt, dass f einen trivialen Kern hat, also injektiv ist.
Nun folgt $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ unmittelbar mit der Surjektivität von f und folgenden Überlegungen: Für $A \in \Sigma_n$ gilt $\det(f(A)) = \det(A) = 0$, also ist $f(A) \in \Sigma_n$. Währenddessen folgt für $B \notin \Sigma_n$ ($B \in K^{n,n}$), dass $\det(f(B)) = \det(B) \neq 0$ bzw. $f(B) \notin \Sigma_n$. □

Der Beweis der Bijektivität von f stammt aus [20, S. 64, Lemma 7] und gilt für alle Körper. (Marcus und Moyls arbeiten in [20] nur über $\mathbb{C}$.)
Sei Stab_n die Menge aller $f \in \mathscr{L}(K^{n,n}, K^{n,n})$, die (1) erfüllen. Wir nennen Stab_n den **Stabilisator der Determinante**. Wie oben bereits erwähnt, gilt

Satz 2.11: $(\mathrm{Stab}_n, \circ)$ *ist eine Untergruppe von* $(\mathrm{GL}(K^{n,n}), \circ)$.

Beweis. Stab_n ist nicht leer, da die Identität auf $K^{n,n}$ linear ist und (1) erfüllt. Weiter zeigt Lemma 2.10 insbesondere, dass $\mathrm{Stab}_n \subseteq \mathrm{GL}(K^{n,n})$ gilt. Zudem ist für $f, g \in \mathrm{Stab}_n$ auch $f \circ g \in \mathrm{Stab}_n$, denn

$$\forall\, A \in K^{n,n} : \quad \det\big(\, f(g(A))\,\big) = \det\big(g(A)\big) = \det(A).$$

Letztlich ist auch $f^{-1} \in \mathrm{Stab}_n$, da

$$\forall\, A \in K^{n,n} : \quad \det\big(f^{-1}(A)\big) = \det\big(\, f(f^{-1}(A))\,\big) = \det(A).$$

Dabei wurde $f \in Stab_n$ beim ersten Gleichheitszeichen verwendet. □

Lemma 2.10 liefert zudem eine notwendige Bedingung für eine lineare Abbildung, um ein Element aus Stab_n zu sein. Statt also direkt den Stabilisator der Determinante zu bestimmen, kann man zunächst untersuchen, welche $f \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ die Gleichung $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ erfüllen.

Bemerkung 2.12*:* Es genügt $f \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ mit $f(\Sigma_n) \subseteq \Sigma_n$ zu fordern. Dann folgt schon $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$, da Σ_n eine algebraische Menge ist. Dies stellt einen Spezialfall der deutlich allgemeineren Aussage [17, S. 41, Theorem 4.5.1] dar.

Beweis. Dieser Beweis ist [17, S. 41f.] entnommen und spezifiziert für Σ_n. Während des gesamten Beweises verwenden wir $K^{n,n} \cong K^{n^2}$ bezüglich κ_n. Sei

$$\mathcal{I} := \big\{p \in K[t_{i,j} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n] \mid \forall\, A \in \Sigma_n :\ p(A) = 0\big\},$$

wobei $K[t_{i,j}] := K[t_{i,j} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n]$ der Polynomring in den Unbestimmten $t_{i,j}$ ist. Es ist $\mathcal{I}$ ein Untervektorraum von $K[t_{i,j}]$ und für das Determinantenpolynom gilt

$$\det = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i,\sigma(i)} \in \mathcal{I}\,.$$

Sei $M \in K^{n^2,n^2}$ die darstellende Matrix von $f \in \mathrm{GL}(K^{n^2})$. Das heißt $f(A) = M \cdot A$ für alle $A \in K^{n,n} = K^{n^2}$. Dann induziert f die K-lineare, bijektive Abbildung $\bar{f} : K[t_{i,j}] \to K[t_{i,j}],\ p \mapsto p\big(M \cdot (t_{i,j})\big)$.
Seien $p \in \mathcal{I}$ und $A \in \Sigma_n$ beliebig. Auf Grund von $f(\Sigma_n) \subseteq \Sigma_n$ folgt $f(A) \in \Sigma_n$ und damit $\bar{f}(p)(A) = p(MA) = p\big(f(A)\big) = 0$. Da A beliebig gewählt war, folgt $\bar{f}(p) \in \mathcal{I}$, also $\bar{f}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. Da stets $\deg(p) \geqslant \deg\big(\bar{f}(p)\big)$ gilt, folgt $\bar{f}(\mathcal{I}_d) \subseteq \mathcal{I}_d$ für alle $d \in \mathbb{N}$. Dabei ist $\mathcal{I}_d$ der Untervektorraum von $\mathcal{I}$, welcher die Polynome aus $\mathcal{I}$ vom Grad höchstens d enthält. Mit der endlichen Dimension von $\mathcal{I}_d$ und der Bijektivität der linearen Abbildung $\bar{f}$ folgt $\bar{f}(\mathcal{I}_d) = \mathcal{I}_d$. Schließlich ist

$$\bar{f}(\mathcal{I}) = \bar{f}\left(\bigcup_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_d\right) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \bar{f}(\mathcal{I}_d) = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_d = \mathcal{I}\,.$$

Damit kann $\Sigma_n \subseteq f(\Sigma_n)$ gezeigt werden. Dazu sei $C \in \Sigma_n$. Dann gibt es genau ein $B \in K^{n,n}$ mit $f(B) = C$. Weiter gibt es genau ein $p \in \mathcal{I}$ mit $\bar{f}(p) = \det$. Aus $p \in \mathcal{I}$ folgt $0 = p(C) = p\big(f(B)\big) = \bar{f}(p)(B) = \det(B)$, also $B \in \Sigma_n$ und $C \in f(\Sigma_n)$. □

Die Charakterisierung solcher f scheint ein natürlicher Zugang zu sein, da auch Marcus und Moyls in [20] zuerst rangerhaltende lineare Abbildungen[1] untersuchen. Anschließend können sie damit ohne großen Aufwand alle linearen Abbildungen, die die Determinante invariant lassen, bestimmen.
Zuerst wollen wir untersuchen, welche an f gestellten Bedingungen hinreichend für $f \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ und $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ sind. Seien dazu $P, Q \in GL_n(K)$. Falls

$$f(A) = PAQ \quad \text{für alle } A \in K^{n,n} \tag{2}$$

gilt, so ist f offensichtlich linear und bijektiv. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch $f^{-1} : K^{n,n} \to K^{n,n},\ A \mapsto P^{-1}AQ^{-1}$. Zudem ist gut zu erkennen, dass $f(\Sigma_n) \subseteq \Sigma_n$ und $f\big(GL_n(K)\big) \subseteq GL_n(K)$ gelten. Aus der Surjektivität von f folgt somit sogar $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$.
Weiterhin ist die Transposition $\tau : K^{n,n} \to K^{n,n},\ A \mapsto A^T$ aus $\mathrm{GL}(K^{n,n})$. Da sie zudem die Determinante invariant lässt, gilt $\tau(\Sigma_n) = \Sigma_n$ nach Lemma 2.10. Somit hat f auch die gewünschten Eigenschaften, falls

$$f(A) = PA^TQ \quad \text{für alle } A \in K^{n,n} \tag{3}$$

gilt. Wir haben somit schon eine Vielzahl an Elementen aus $\mathrm{GL}(K^{n,n})$ gefunden, die Σ_n auf sich selbst abbilden. Die naheliegende Frage lautet daher: Sind dies schon alle?! Interessanterweise lautet die Antwort „Ja!“:

Theorem 2.13: Der Stabilisator von Σ_n
Sei $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$ eine lineare, bijektive Abbildung mit $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$. Dann existieren $P, Q \in GL_n(K)$, sodass (2) oder (3) gilt.

Dieses große Theorem wird in dieser Arbeit in zwei Schritten bewiesen, nämlich für den Fall $n = 2$ in Abschnitt 3.2 sowie für den Fall $n \geqslant 3$ als Theorem 4.2. Für $n = 1$ ist die Aussage klar, da $\Sigma_1 = \{0\}$ gilt und jede bijektive, lineare Abbildung $K \to K$ von der Form $x \mapsto \lambda x$ mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ist.
Es soll schon jetzt gezeigt werden, wie wir mit Theorem 2.13 den Stabilisator der Determinante bestimmen können.

Theorem 2.14: Der Stabilisator der Determinante
Sei $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$ eine lineare Abbildung. Es gilt $f \in \mathrm{Stab}_n$ bzw. (1) genau dann, wenn es $P, Q \in GL_n(K)$ mit $\det(PQ) = 1$ gibt, sodass (2) oder (3) gilt.

Beweis. Sei $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$ zuerst eine lineare Abbildung mit (1). Dann gilt nach Lemma 2.10, dass f bijektiv und $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ ist. Nach Theorem 2.13 existieren $P, Q \in GL_n(K)$ mit (2) oder (3). Es verbleibt $\det(PQ) = 1$ zu zeigen. Doch dies folgt sofort mit

$$1 = \det(I_n) = \det\big(f(I_n)\big) = \det(PI_nQ) = \det(PQ).$$

(Falls (3) gilt, muss zudem $I_n = I_n^T$ verwendet werden.)
Die andere Richtung folgt sofort mit dem Determinanten-Multiplikationssatz und $\det(A) = \det(A^T)$ für alle $A \in K^{n,n}$. □

[1] Sie untersuchen alle $h \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^{n,n}, \mathbb{C}^{n,n})$ mit $h(R_k) \subseteq R_k$ für alle $k = 1, \dots, n$, wobei $R_k := \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid \mathrm{Rang}(A) = k\}$. Somit gilt insbesondere $h(\Sigma_n) \subseteq \Sigma_n$.

Beim Beweis von Theorem 2.14 ist deutlich zu erkennen, dass die wesentliche Arbeit in Theorem 2.13 steckt. Tatsächlich werden viele Vorarbeiten aus der Linearen Algebra und der projektiven Geometrie benötigt, um Dieudonnés Zugang aus [7] nachvollziehen zu können. Diese sollen in den weiteren Abschnitten von Kapitel 2 und in Kapitel 3 ausführlich behandelt werden, da sie wesentlich zum Verständnis des eigentlichen Beweises sind.
Als Erstes werden wir die singulären Vektorräume maximaler Dimension charakterisieren. Es wird sich herausstellen, dass es sich genau um die so genannten maximalen Links- und Rechtsideale von $K^{n,n}$ handelt. Dieser Zusammenhang wird nun in 2.3 und 2.4 herausgearbeitet.

2.3 Links- und Rechtsideale von $K^{n,n}$

Dieser Abschnitt dient vor allem dazu, die Resultate über Links- und Rechtsideale von $K^{n,n}$, die Dieudonné in seinem Beweis ([7, S. 286f.]) von Theorem 2.13 verwendet, vorzustellen und zu beweisen. Die hier präsentierten Beweise (besonders ab Proposition 2.20) entstanden zum großen Teil aus Eigenarbeit. Es ist jedoch nicht auszuschließen, dass sich einige Beweise so oder in ähnlicher Form in mir unbekannter Literatur wieder finden.
Hilfreich zur Erstellung dieses Abschnittes war [7, S. 282], wo Dieudonné die Korrespondenz von maximalen Rechtsidealen mit den Hyperebenen von K^n sowie die Korrespondenz von maximalen Linksidealen mit den Geraden von K^n anspricht und die Grundideen erwähnt. Für einen Beweis dieser Korrespondenzen verweist Dieudonné auf [6, S. 64-66]. Zudem gaben [17, S. 600] und [23, S. 43] den entscheidenden Anstoß für die Präsentation ab Proposition 2.23. Diese eignet sich hier exzellent und ist sehr stark am Vorgehen aus der (klassischen) Algebraischen Geometrie angelehnt. Zum Beispiel wird dies in [14, 1.1 Der Nullstellensatz] angewendet. So stellt Satz 2.24 ein Analogon zu [14, S. 22, Korollar 1.12] dar. Genauso verhält es sich mit Proposition 2.23 und Teilen von Lemma 1.1 und 1.2 aus [14, S. 17].

Nach dieser kurzen Quelleneinordnung kommen wir zur grundlegenden Definition dieses Abschnittes.

Definition 2.15: Sei R ein Ring mit Eins. Eine Untergruppe $(\mathcal{I}, +)$ von $(R, +)$ heißt

1. **Linksideal**, falls $ab \in \mathcal{I}$ für alle $a \in R$ und alle $b \in \mathcal{I}$ gilt.
2. **Rechtsideal**, falls $ba \in \mathcal{I}$ für alle $a \in R$ und alle $b \in \mathcal{I}$ gilt
3. **Ideal**, falls $\mathcal{I}$ sowohl ein Links- als auch ein Rechtsideal ist.

Weiter heißt ein Linksideal $\mathcal{L} \subsetneq R$ **maximal**, falls für jedes Linksideal $\mathcal{I}$ von R aus $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I} \subseteq R$ stets $\mathcal{I} \in \{\mathcal{L}, R\}$ folgt. Analog werden maximale Rechtsideale definiert.

ACHTUNG: Zur Schreibvereinfachung wird folgender Notationsmissbrauch eingeführt. Die Bezeichnung **„maximale Ideale“** meint in dieser Arbeit die Gesamtheit aller maximalen Links- *und* aller maximalen Rechtsideale von $K^{n,n}$.

Im Gegensatz zu kommutativen Ringen, kann man bei dem Ring $K^{n,n}$ keine wichtigen strukturellen Ergebnisse bei der Betrachtung der Ideale erzielen. Dies liegt an dem Fakt, dass $K^{n,n}$ ein einfacher Ring ist. Das heißt $\{0\}$ und $K^{n,n}$ sind die einzigen Ideale. (Dies folgt z. B. aus Satz 2.21 und Korollar 2.22.) Deshalb werden wir uns im Folgenden mit den Links- und Rechtsidealen von $K^{n,n}$ beschäftigen, welche sich sehr elegant charakterisieren lassen.
Zunächst wollen wir eine aus der Ringtheorie wohlbekannte Aussage speziell für $K^{n,n}$ formulieren und ein wichtiges Beispiel betrachten:

Proposition 2.16: *Für ein Links- bzw. Rechtsideal $\mathcal{I}$ von $K^{n,n}$ gilt $\mathcal{I} \subsetneq K^{n,n}$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \subseteq \Sigma_n$ ist.*

Beweis. Ist $\mathcal{I} \subseteq \Sigma_n$ folgt sofort $\mathcal{I} \subsetneq K^{n,n}$. Sei andererseits $\mathcal{I} \nsubseteq \Sigma_n$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix A mit $A \in \mathcal{I}$. Aus der Idealeigenschaft (links oder rechts) folgt $I_n = A^{-1}A = AA^{-1} \in \mathcal{I}$. Somit ist $B = BI_n = I_nB \in \mathcal{I}$ für jedes $B \in K^{n,n}$. Das heißt $\mathcal{I} = K^{n,n}$. $\square$

Beispiel 2.17: Das Linksideal $\mathcal{L}_n$ und das Rechtsideal $\mathcal{R}_n$
Sei $\mathcal{L}_n := \{(a_{i,j}) \in K^{n,n} \mid a_{i,1} = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$ die Menge aller quadratischen Matrizen, deren erste Spalte Null ist. Man prüft leicht nach, dass es sich um ein Linksideal handelt. Des Weiteren ist $\mathcal{L}_n$ ein Unterraum von $K^{n,n}$. Eine Basis ist z. B. gegeben durch $\{E_{i,j} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ j \neq 1\}$ und somit gilt $\dim \mathcal{L}_n = n^2 - n$. In Korollar 2.28 werden wir sehen, dass $\mathcal{L}_n$ gewissermaßen die „Mutter" aller maximalen Linksideale ist. Das Analogon bei den maximalen Rechtsidealen stellt $\mathcal{R}_n := \mathcal{L}_n^T := \{A^T \mid A \in \mathcal{L}_n\}$ - die Menge aller quadratischen Matrizen mit erster Zeile Null - dar.

In diesem Beispiel klingen schon viele Eigenschaften von (maximalen) Links- und Rechtsidealen an. Zum einen gilt

Proposition 2.18: *Jedes Links- bzw. Rechtsideal $\mathcal{I}$ von $K^{n,n}$ ist ein Unterraum von $K^{n,n}$.*

Beweis. Es ist $\mathcal{I} \neq \emptyset$, da $0 \in \mathcal{I}$ gilt. Weiter folgt für $A, B \in \mathcal{I}$ stets $A + B \in \mathcal{I}$, denn $(\mathcal{I}, +)$ ist eine Gruppe. Letztlich gilt für alle $A \in \mathcal{I}$, $\lambda \in K$

$$\lambda A = (\lambda I_n)A \in \mathcal{I} \quad \text{bzw.} \quad \lambda A = A(\lambda I_n) \in \mathcal{I} \ ,$$

falls $\mathcal{I}$ ein Links- bzw. Rechtsideal ist. $\square$

Des Weiteren gilt

Lemma 2.19: *Die Transposition $\tau : K^{n,n} \to K^{n,n},\ A \mapsto A^T$ schickt (maximale) Linksideale auf (maximale) Rechtsideale und umgekehrt.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}$ ein Linksideal von $K^{n,n}$. Dann ist $\mathcal{L}$ ein Unterraum von $K^{n,n}$ und da τ linear ist, ist auch $\mathcal{L}^T := \tau(\mathcal{L})$ ein Unterraum von $K^{n,n}$. Insbesondere ist $(\mathcal{L}^T, +)$ eine Untergruppe von $(K^{n,n}, +)$. Außerdem gilt

$$\forall\ A \in K^{n,n}, B \in \mathcal{L}^T : \quad BA = (A^T B^T)^T \in \mathcal{L}^T \ ,$$

da $B^T \in \mathcal{L}$ und damit $A^T B^T \in \mathcal{L}$ ist. Man beachte, dass τ selbstinvers ist. Insgesamt ist $\mathcal{L}^T$ ein Rechtsideal. Die umgekehrte Aussage wird analog gezeigt.
Sei $\mathcal{L}$ nun ein maximales Linksideal. Aus $\mathcal{L} \subsetneq K^{n,n}$ folgt mit der Bijektivität von τ sofort $\mathcal{L}^T \subsetneq K^{n,n}$. Sei $\mathcal{R}$ ein Rechtsideal mit $\mathcal{L}^T \subseteq \mathcal{R} \subseteq K^{n,n}$. Dann ist $\mathcal{R}^T$ ein Linksideal mit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}^T \subseteq K^{n,n}$. Aus der Maximalität von $\mathcal{L}$ folgt $\mathcal{R}^T \in \{\mathcal{L}, K^{n,n}\}$ und Anwenden von τ liefert $\mathcal{R} \in \{\mathcal{L}^T, K^{n,n}\}$. Das zeigt, dass $\mathcal{L}^T$ maximal ist. Erneut wird die umgekehrte Aussage analog bewiesen. □

Wir können uns deshalb im Folgenden auf die Charakterisierung der Linksideale beschränken und die Ergebnisse mittels τ auf Rechtsideale übertragen oder genau umgekehrt vorgehen.
Jetzt soll gezeigt werden, dass maximale Rechtsideale von $K^{n,n}$ in 1:1 Korrespondenz mit den Hyperebenen von K^n stehen. Um dieses Resultat (Satz 2.21) formulieren zu können, benötigen wir eine kleine Vorarbeit. Sei $\mathcal{R}$ dazu ein Rechtsideal und

$$\mathcal{R}_{(k)} := \{s \in K^n \mid \exists\, A \in \mathcal{R} :\ s \text{ ist die } k\text{-te Spalte von } A\} \text{ für } k = 1, \ldots, n\,.$$

Da $\mathcal{R}$ ein Unterraum von $K^{n,n}$ ist, folgt, dass $\mathcal{R}_{(k)}$ ein Unterraum von K^n ist. Man beachte den wichtigen Unterschied in der Notation von $\mathcal{R}_n$ und $\mathcal{R}_{(n)}$! Dieser wird dank der folgenden Proposition keine Rolle mehr spielen.

Proposition 2.20: *Es gilt* $\mathcal{R}_{(1)} = \ldots = \mathcal{R}_{(n)} =: \mathcal{R}_S$.

Beweis. Seien $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig mit $k \neq l$ sowie $P_{k,l} = P_{l,k}$ die Permutationsmatrix, die genau die k-te und l-te Spalte einer Matrix bei Rechtsmultiplikation vertauscht. Weiter sei $s \in \mathcal{R}_{(k)}$ und $A \in \mathcal{R}$, sodass s die k-te Spalte von A ist. Dann ist $AP_{k,l} \in \mathcal{R}$ (da $\mathcal{R}$ ein Rechtsideal ist) und s die l-te Spalte von $AP_{k,l}$. Somit ist $s \in \mathcal{R}_{(l)}$. Dies zeigt $\mathcal{R}_{(k)} \subseteq \mathcal{R}_{(l)}$ und Rollenvertauschung von k und l liefert $\mathcal{R}_{(k)} \supseteq \mathcal{R}_{(l)}$. □

Im Folgenden bezeichnet $\otimes$ das Tensorprodukt. Das heißt für Unterräume $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ von K^n ist $\mathcal{U} \otimes \mathcal{W} = \operatorname{Span}\{u \otimes w = u \cdot w^T \mid u \in \mathcal{U},\ w \in \mathcal{W}\}$.

Satz 2.21: *Für ein Rechtsideal* $\mathcal{R}$ *von* $K^{n,n}$ *gilt* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_S \otimes K^n$ *und somit hat* $\mathcal{R}$ *die Dimension* $\dim \mathcal{R} = n \cdot \dim \mathcal{R}_S$. *Zudem sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \{\textit{Rechtsideale von } K^{n,n}\} &\longleftrightarrow \{\textit{Unterräume von } K^n\} \\ \mathcal{R} = \mathcal{R}_S \otimes K^n &\longrightarrow \mathcal{R}_S \\ \mathcal{W} \otimes K^n &\longleftarrow \mathcal{W} \end{aligned}$$

wohldefiniert und invers zueinander. Für $k = 0, 1, \ldots, n$ *gilt folgende Korrespondenz*

$$\{\textit{Rechtsideale der Dimension } n \cdot k\} \xleftrightarrow{1:1} \{k\textit{-dim. Unterräume von } K^n\}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{R}$ *maximal genau dann, wenn* $\dim \mathcal{R} = n(n-1) = n^2 - n$ *gilt.*

Beweis. Zuerst zeigen wir $\mathcal{R} = \mathcal{R}_S \otimes K^n$.
Für $A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$ gilt $a_i \in \mathcal{R}_{(i)} = \mathcal{R}_S$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Damit folgt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes e_i \right) \in \mathcal{R}_S \otimes K^n.$$

Dies zeigt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_S \otimes K^n$. Wir zeigen die Gleichheit, indem wir zeigen, dass $\mathcal{R}$ eine Basis von $\mathcal{R}_S \otimes K^n$ enthält.
Sei hierzu $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von $\mathcal{R}_S = \mathcal{R}_{(1)}$. Dann existieren $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{R}$, sodass v_k die erste Spalte von A_k ist, wobei $k = 1, \ldots, d$. Somit gilt

$$B_k := A_k E_{1,1} = \begin{pmatrix} v_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = v_k \cdot e_1^T = v_k \otimes e_1 \in \mathcal{R} \,,$$

da $\mathcal{R}$ ein Rechtsideal ist. Des Weiteren ist für alle $i = 1, \ldots, n$ und $k = 1, \ldots, d$

$$B_k P_{1,i} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & v_k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = v_k \otimes e_i \in \mathcal{R} \,,$$

wobei $P_{1,1} := I_n$ ist und v_k in der i-ten Spalte von $B_k P_{1,i}$ steht. Die $v_k \otimes e_i$ bilden eine Basis von $\mathcal{R}_S \otimes K^n$, weil $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von $\mathcal{R}_S$ und $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von K^n ist. Somit enthält $\mathcal{R}$ eine Basis von $\mathcal{R}_S \otimes K^n$. Dies zeigt $\mathcal{R} = \mathcal{R}_S \otimes K^n$ und es folgt $\dim \mathcal{R} = \dim (\mathcal{R}_S \otimes K^n) = n \cdot \dim \mathcal{R}_S$.
Die Abbildung $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}_S$ ist wohldefiniert, da $\mathcal{R}_S$ ein Unterraum von K^n ist. Um zu zeigen, dass $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W} \otimes K^n$ wohldefiniert ist, muss abgesichert werden, dass $\mathcal{W} \otimes K^n$ stets ein Rechtsideal von $K^{n,n}$ für einen Unterraum $\mathcal{W}$ von K^n ist.
Da $\mathcal{W} \otimes K^n$ ein Vektorraum ist, ist $(\mathcal{W} \otimes K^n, +)$ eine abelsche Gruppe. Sei weiter $A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \otimes K^n$, das heißt $a_i \in \mathcal{W}$. Dann gilt für alle $B \in K^{n,n}$

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i^T \right) B = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (B^T e_i)^T = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes (B^T e_i) \ \in \mathcal{W} \otimes K^n,$$

also ist $\mathcal{W} \otimes K^n$ ein Rechtsideal von $K^{n,n}$.
Dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind, ist unmittelbar ersichtlich und die angesprochenen Korrespondenzen folgen sofort. Insbesondere entsprechen maximale Rechtsideale den Hyperebenen von K^n. □

Mittels der Transposition und Lemma 2.19 kann somit jedem Linksideal $\mathcal{L}$ von $K^{n,n}$ der Unterraum $\mathcal{L}_Z := ((\mathcal{L}^T)_S)^T$ von $K^{1,n}$ zugewiesen werden. Dabei steht das tiefgestellte Z für Zeile und für jedes $A \in \mathcal{L}$ sind die Zeilen von A aus $\mathcal{L}_Z$. Außerdem wandelt sich Satz 2.21 wie folgt:

Korollar 2.22: *Für ein Linksideal $\mathcal{L}$ von $K^{n,n}$ gilt $\mathcal{L} = K^n \otimes (\mathcal{L}_Z)^T$ und somit gilt* $\dim \mathcal{L} = n \cdot \dim(\mathcal{L}_Z)^T = n \cdot \dim \mathcal{L}_Z$. *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \{\textit{Linksideale von } K^{n,n}\} &\longleftrightarrow \{\textit{Unterräume von } K^{1,n}\} \\ \mathcal{L} = K^n \otimes (\mathcal{L}_Z)^T &\longrightarrow \mathcal{L}_Z \\ K^n \otimes \mathcal{W}^T &\longleftarrow \mathcal{W} \end{aligned}$$

sind invers zueinander. Insbesondere gilt $\dim \mathcal{L} = n(n-1) = n^2 - n$ *genau dann, wenn $\mathcal{L}$ maximal ist.*

Damit wurde die erste wichtige 1:1 Korrespondenz von Links- bzw. Rechtsidealen mit den Unterräumen des $K^{1,n}$ bzw. des $K^n \cong K^{n,1}$ bewiesen. Im Beweis von Theorem 2.13 nach Dieudonné werden wir jedoch die (gewissermaßen) duale Version der jeweiligen Korrespondenz benötigen. Diese soll nun für Linksideale formuliert und bewiesen werden. Dazu sei $\mathcal{L}$ ein Linksideal von $K^{n,n}$ und $\mathcal{W}$ ein Unterraum von K^n. Wir definieren

$$V(\mathcal{L}) := \{w \in K^n \mid \forall\, A \in \mathcal{L} :\ Aw = 0\}$$

und

$$I(\mathcal{W}) := \{A \in K^{n,n} \mid \forall\, w \in \mathcal{W} :\ Aw = 0\}.$$

Man prüft schnell nach, dass $V(\mathcal{L})$ ein Unterraum von K^n und $I(\mathcal{W})$ ein Linksideal von $K^{n,n}$ ist. Weitere unmittelbar folgende Eigenschaften halten wir in einer Proposition fest.

Proposition 2.23: *Seien $\mathcal{J}, \mathcal{L}$ Linksideale von $K^{n,n}$ und $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ Unterräume von K^n. Dann gilt*

1. *$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ impliziert $I(\mathcal{U}) \supseteq I(\mathcal{W})$; $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}$ impliziert $V(\mathcal{J}) \supseteq V(\mathcal{L})$.*
2. *$\mathcal{W} \subseteq V(I(\mathcal{W}))$ und $\mathcal{L} \subseteq I(V(\mathcal{L}))$.*
3. *$I(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = I(\mathcal{U}) \cap I(\mathcal{W})$ sowie $V(\mathcal{J} + \mathcal{L}) = V(\mathcal{J}) \cap V(\mathcal{L})$.*

Beweis. 1. und 2. sind klar. Bei 3. wird beispielhaft $I(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = I(\mathcal{U}) \cap I(\mathcal{W})$ bewiesen. Da $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{W}$ gilt, folgt $I(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \subseteq I(\mathcal{U})$ und $I(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \subseteq I(\mathcal{W})$. Das zeigt $I(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \subseteq I(\mathcal{U}) \cap I(\mathcal{W})$. Sei nun $A \in I(\mathcal{U}) \cap I(\mathcal{W})$. Dann gilt für beliebiges $v = u + w \in \mathcal{U} + \mathcal{W}$ mit $u \in \mathcal{U}, w \in \mathcal{W}$, dass

$$Av = A(u + w) = Au + Aw = 0 + 0 = 0.$$

Somit ist $A \in I(\mathcal{U} + \mathcal{W})$. Dies zeigt $I(\mathcal{U} + \mathcal{W}) \supseteq I(\mathcal{U}) \cap I(\mathcal{W})$. □

In 2. gilt sogar jeweils die Gleichheit. Das liefert die angestrebte Korrespondenz.

Satz 2.24: *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \{\textit{Linksideale von } K^{n,n}\} &\longleftrightarrow \{\textit{Unterräume von } K^n\} \\ \mathcal{L} &\longrightarrow V(\mathcal{L}) \\ I(\mathcal{W}) &\longleftarrow \mathcal{W} \end{aligned}$$

sind invers zueinander. Dabei gilt für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ folgende Korrespondenz

$$\{\textit{Linksideale der Dimension } n \cdot (n-k)\} \xleftrightarrow{1:1} \{k\textit{-dim. Unterräume von } K^n\}.$$

Insbesondere entsprechen die maximalen Linksideale bijektiv den Geraden des K^n.

Beweis. Zuerst sei angemerkt, dass jedes Element f aus $(K^n)^*$ eindeutig zu einer darstellenden Matrix $A \in K^{1,n}$ gehört, sodass $f(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$ gilt. Somit können wir im Folgenden $(K^n)^*$ als $K^{1,n}$ auffassen.

Sei $\mathcal{W}$ ein Unterraum von K^n und $\mathcal{J} := I(\mathcal{W})$. Es gilt $\mathcal{J} = K^n \otimes (\mathcal{J}_Z)^T$ nach Korollar 2.22. Aus der Definition von $I(\mathcal{W})$ und diesem Zusammenhang von $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}_Z$ folgt $\mathcal{W}^0 = \mathcal{J}_Z \subseteq K^{1,n} = (K^n)^*$:

Für $x \in \mathcal{J}_Z \subseteq K^{1,n}$ ist $e_1 x = e_1 \otimes (x)^T \in \mathcal{J}$. Nach Definition von $\mathcal{J}$ gilt für alle

$w \in \mathcal{W}$, dass $e_1(xw) = (e_1x)w = 0$. Aus $e_1 \neq 0$ und $xw \in K$ folgt sogar $xw = 0$ für alle $w \in \mathcal{W}$. Somit ist $x \in \mathcal{W}^0$ und es gilt $\mathcal{J}_Z \subseteq \mathcal{W}^0$.
Andererseits ist für jedes $x \in \mathcal{W}^0 \subseteq K^{1,n}$ auch $xw = 0$ für alle $w \in \mathcal{W}$. Damit gilt $(e_1x)w = e_1(xw) = 0$ für alle $w \in \mathcal{W}$. Es folgt

$$e_1x = e_1 \otimes (x)^T \in I(\mathcal{W}) = \mathcal{J} = K^n \otimes (\mathcal{J}_Z)^T,$$

also $x \in \mathcal{J}_Z$. Dies zeigt $\mathcal{W}^0 \subseteq \mathcal{J}_Z$ und insgesamt gilt $\mathcal{W}^0 = \mathcal{J}_Z$.
Analog folgt aus der Definition von $V(\mathcal{J})$ und dem Zusammenhang von $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}_Z$, dass $V(\mathcal{J}) = (\mathcal{J}_Z)^0 \subseteq K^n$ gilt. Damit erhalten wir

$$V(I(\mathcal{W})) = V(\mathcal{J}) = (\mathcal{J}_Z)^0 = (\mathcal{W}^0)^0 = \mathcal{W}$$

unter Verwendung von Proposition 2.5.
Sei $\mathcal{L}$ ein Linksideal von $K^{n,n}$. Genau wie eben folgt $\mathcal{U} := V(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_Z)^0 \subseteq K^n$ und $I(\mathcal{U})_Z = \mathcal{U}^0 \subseteq (K^n)^*$. Damit gilt

$$I(V(\mathcal{L}))_Z = I(\mathcal{U})_Z = U^0 = ((\mathcal{L}_Z)^0)^0 = \mathcal{L}_Z$$

mittels Proposition 2.5. Es folgt $I(V(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ aus der bijektiven Korrespondenz $\mathcal{L} \longleftrightarrow \mathcal{L}_Z$, siehe Korollar 2.22.
Sei $\mathcal{W}$ nun ein k-dimensionaler Unterraum von K^n. Wie oben bereits besprochen gilt für $\mathcal{J} := I(\mathcal{W})$, dass $\mathcal{J}_Z = \mathcal{W}^0$. Nach Korollar 2.22 gilt

$$\dim \mathcal{J} = n \cdot \dim \mathcal{J}_Z = n \cdot \dim \mathcal{W}^0 = n \cdot (n - \dim \mathcal{W}) = n \cdot (n-k).$$

Dies beweist den zweiten Teil des Satzes. □

Korollar 2.25: *Jedes Linksideal $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{L} \subsetneq K^{n,n}$ lässt sich als Schnitt maximaler Linksideale darstellen.*

Beweis. Sei $\mathcal{W} := V(\mathcal{L})$ und $w_1, \ldots, w_d$ eine Basis von $\mathcal{W}$. Da $\mathcal{L} \neq K^{n,n}$ gilt, ist $d \geqslant 1$. Weiter setzen wir $\mathcal{W}_k := \langle w_k \rangle$. Mit Proposition 2.23 und Satz 2.24 gilt

$$\mathcal{L} = I(V(\mathcal{L})) = I(\mathcal{W}) = I\left(\sum_{k=1}^{d} \mathcal{W}_k\right) = \bigcap_{k=1}^{d} I(\mathcal{W}_k).$$

Da die w_k eine Basis von $\mathcal{W}$ bilden, sind sie insbesondere ungleich Null. Daraus folgt $\dim \mathcal{W}_k = 1$ und somit ist jedes $I(\mathcal{W}_k)$ ein maximales Linksideal. □

Bemerkung 2.26*:* Die Ergebnisse aus Satz 2.24 und Korollar 2.25 können mit der Transposition τ auf Rechtsideale übertragen werden.

Korollar 2.27: *Seien $\mathcal{J}, \mathcal{L}$ Linksideale von $K^{n,n}$ und $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ Unterräume von K^n. Dann gelten $I(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = I(\mathcal{U}) + I(\mathcal{W})$ und $V(\mathcal{J} \cap \mathcal{L}) = V(\mathcal{J}) + V(\mathcal{L})$.*

Beweis. Beispielhaft wird der zweite Teil der Aussage gezeigt. Das Anwenden der Bijektion I auf die Unterräume $V(\mathcal{J} \cap \mathcal{L})$ und $V(\mathcal{J}) + V(\mathcal{L})$ von K^n liefert mit Proposition 2.23

$$I\big(V(\mathcal{J} \cap \mathcal{L})\big) = \mathcal{J} \cap \mathcal{L} \quad \text{und} \quad I\big(V(\mathcal{J}) + V(\mathcal{L})\big) = I\big(V(\mathcal{J})\big) \cap I\big(V(\mathcal{L})\big) = \mathcal{J} \cap \mathcal{L},$$

also $I\big(V(\mathcal{J} \cap \mathcal{L})\big) = I\big(V(\mathcal{J}) + V(\mathcal{L})\big)$. Es folgt $V(\mathcal{J} \cap \mathcal{L}) = V(\mathcal{J}) + V(\mathcal{L})$ aus der Injektivität von I. □

Korollar 2.28: *Sei $\mathcal{L}$ ein maximales Links- und $\mathcal{R}$ ein maximales Rechtsideal von $K^{n,n}$. Dann existieren $P, Q \in GL_n(K)$ mit $\mathcal{L}P := \{AP \mid A \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L}_n$ und $Q\mathcal{R} = \mathcal{R}_n$.*

Beweis. Da $\mathcal{L}$ maximal ist, gilt $\dim V(\mathcal{L}) = 1$. Sei also $w \in K^n$ eine Basis von $V(\mathcal{L})$. Wir ergänzen diese zu einer Basis von K^n mittels geeigneter $p_2, \ldots, p_n$ und setzen $P := \begin{pmatrix} w & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$. Dann ist P invertierbar und damit folgt

$$V(\mathcal{L}_n P^{-1}) = \langle Pe_1 \rangle = \langle w \rangle = V(\mathcal{L}),$$

da $V(\mathcal{L}_n) = \langle e_1 \rangle$ ist. Anwenden von I liefert $\mathcal{L}_n P^{-1} = \mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}P$.
Da $\mathcal{R}^T$ ein maximales Linksideal ist (Lemma 2.19), existiert $B \in GL_n(K)$ mit $\mathcal{L}_n = \mathcal{R}^T B$. Das Anwenden von τ liefert $\mathcal{R}_n = \mathcal{L}_n^T = B^T \mathcal{R}$. Die Behauptung folgt mit $Q := B^T \in GL_n(K)$. □

Ein Schritt von Dieudonné in [7] zum Beweis von Theorem 2.13 ist das Analysieren des Schnittverhaltens zweier maximaler Ideale.

Lemma 2.29: *Der Schnitt zweier verschiedener, maximaler Ideale von $K^{n,n}$ ist ein Unterraum von $K^{n,n}$ der Dimension $n^2 - 2n$, falls sie gleichen Typs sind. Sind sie unterschiedlichen Typs, so beträgt die Dimension des Schnittes $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$.*

Beweis. Seien $\mathcal{J}, \mathcal{L}$ zwei maximale Linksideale von $K^{n,n}$ mit $\mathcal{J} \neq \mathcal{L}$ und w_1, w_2 so, dass $V(\mathcal{J}) = \langle w_1 \rangle$ und $V(\mathcal{L}) = \langle w_2 \rangle$ gilt. Aus $\mathcal{J} \neq \mathcal{L}$ folgt $V(\mathcal{J}) \neq V(\mathcal{L})$ und somit sind w_1 und w_2 linear unabhängig. Folglich ist $\mathcal{W} := \langle w_1, w_2 \rangle$ zweidimensional. Mit Satz 2.24 und Proposition 2.23 gilt

$$\mathcal{J} \cap \mathcal{L} = I\big(\langle w_1 \rangle\big) \cap I\big(\langle w_2 \rangle\big) = I\big(\langle w_1 \rangle + \langle w_2 \rangle\big) = I(\mathcal{W})$$

und $I(\mathcal{W})_Z = \mathcal{W}^0$ wie im Beweis von Satz 2.24. Aus $n = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^0$ (Proposition 2.5) folgt $\dim \mathcal{W}^0 = n - 2$. Nun ergibt sich die Behauptung mittels

$$\dim I(\mathcal{W}) = n \cdot \dim I(\mathcal{W})_Z = n \cdot \dim \mathcal{W}^0 = n(n-2)$$

unter Verwendung von Korollar 2.22.
Für zwei verschiedene, maximale Rechtsideale folgt die Aussage direkt mit der Bijektivität von τ und Lemma 2.19.
Sei $\mathcal{R}$ ein maximales Rechtsideal. Nach Korollar 2.28 gibt es $P, Q \in GL_n(K)$ mit $\mathcal{L}P = \mathcal{L}_n$ und $Q\mathcal{R} = \mathcal{R}_n$. Da Q invertierbar und $\mathcal{L}_n$ ein Linksideal ist, folgt $Q\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n$. Analog gilt $\mathcal{R}_n P = \mathcal{R}_n$. Demzufolge ist $Q\mathcal{L}P = Q\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n$ und $Q\mathcal{R}P = \mathcal{R}_n P = \mathcal{R}_n$. Offensichtlich gilt $\dim(\mathcal{L}_n \cap \mathcal{R}_n) = (n-1)^2$ (vgl. Definition in Beispiel 2.17). Dies soll nun auf den Schnitt von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{R}$ übertragen werden. Da $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$, $A \mapsto QAP$ linear und bijektiv ist, bildet f Unterräume auf Unterräume ab und erhält dabei die Dimension. Damit gilt

$$\begin{aligned}(n-1)^2 &= \dim(\mathcal{L}_n \cap \mathcal{R}_n) = \dim(Q\mathcal{L}P \cap Q\mathcal{R}P) = \dim\big(f(\mathcal{L}) \cap f(\mathcal{R})\big)\\ &= \dim f(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}).\end{aligned}$$

Im ersten Gleichheitszeichen der zweiten Zeile wurde $f(\mathcal{L}) \cap f(\mathcal{R}) = f(\mathcal{L} \cap \mathcal{R})$ verwendet, was auf Grund der Bijektivität von f gilt. □

Ein ganz entscheidender Punkt von Dieudonnés Beweis ist, dass ein $f \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ mit $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ maximale Ideale auf maximale Ideale abbildet. Bisher wissen wir aber nur, dass ein maximales Ideal $\mathcal{J}$ von $K^{n,n}$ ein Unterraum des $K^{n,n}$ ist und $\dim \mathcal{J} = n^2 - n$ gilt. Demzufolge ist $f(\mathcal{J}) \subseteq \Sigma_n$ ein Unterraum von $K^{n,n}$ der Dimension $n^2 - n$.
Es verbleibt demnach zu zeigen, dass jeder singuläre Vektorraum der Dimension $n^2 - n$ schon ein maximales Ideal von $K^{n,n}$ ist. Dies ist ein Ergebnis, dass Dieudonné bei der Betrachtung der singulären Vektorräume maximaler Dimension erzielte.

2.4 Lineare Teilräume maximaler Dimension von Σ_n

Dieser Abschnitt bettet sich hier gut in den Verlauf der Arbeit ein, steht jedoch auch für sich selbst. Dem wird im Titel der Arbeit („[...] maximal lineare Teilräume“) Rechnung getragen. Um die Geometrie der so genannten Hyperfläche $\Sigma_n \subseteq K^{n,n} \cong K^{n^2}$ besser zu verstehen, interessiert man sich für die Vektorräume, die in Σ_n enthalten sind. Wir haben diese Vektorräume singulär genannt (siehe Abschnitt 2.1). Da jeder singuläre Vektorraum in einem (inklusions-)maximalen singulären Vektorraum enthalten ist, genügt es, Letztere vollständig zu charakterisieren.
Jedoch handelt es sich hierbei um ein schwieriges Problem, das nach meinem Wissen, nach wie vor Gegenstand aktueller Forschung und noch nicht (vollständig) gelöst ist (siehe Ausblick). Statt sich also auf alle maximal singulären Räume zu konzentrieren, werden wir uns im Folgenden nur mit einer kleinen Gruppe dieser beschäftigen, um das Problem zu vereinfachen. Und zwar werden wir uns mit den singulären Räumen maximaler Dimension befassen, welche nach Proposition 2.2 insbesondere maximal singulär sind. Die Charakterisierung der singulären Räume maximaler Dimension ist seit langem abgeschlossen, z. B. gelang sie Dieudonné in [7, Théorème 1]. Wie sehen diese nun genau aus?
Wir haben bereits gesehen, dass $\mathcal{L}_n$ singulär ist mit $\dim \mathcal{L}_n = n^2 - n$. Die sich anschließende Frage lautet somit: *Gibt es singuläre Vektorräume deren Dimension echt größer als $n^2 - n$ ist?* Interessanterweise gibt es keine! Das heißt jeder singuläre Vektorraum hat höchstens die Dimension $n^2 - n$ und $\mathcal{L}_n$ ist singulär von maximaler Dimension.
Im Folgenden wird jedoch nicht der Beweis von Dieudonné aus [7] ausgearbeitet, sondern ein Teil der Abhandlung [9] von P. Fillmore, C. Laurie und H. Radjavi. Der Zugang von Fillmore et. al. wurde gewählt, da er meines Erachtens elegant und gut verständlich ist. Zudem stellt er eine Verallgemeinerung von Dieudonnés Ergebnis dar, das zusätzlichen Aufschluss über bestimmte singuläre Räume gibt.
Es sei noch einmal ausdrücklich erwähnt, dass alles Folgende bis Satz 2.36 eine Ausarbeitung von [9, S. 255-259] darstellt, wobei Theorem 3 von S. 259 nicht behandelt wird. Für die Ausarbeitung war [11] von Flanders hilfreich, da hier der Begriff des dualen Raumpaares erwähnt wurde. Flanders erzielt sehr ähnliche Ergebnisse wie Fillmore et. al.
Sei $\mathcal{V}$ in diesem Abschnitt stets ein singulärer Vektorraum. Ein erster Schritt zur Vereinfachung der Charakterisierung ist, zu erkennen, dass man i.A. aus $\mathcal{V}$ eine ganze Reihe singulärer Vektorräume generieren kann. Für $P, Q \in GL_n(K)$ sind auch $P\mathcal{V}Q$ und $P\mathcal{V}^TQ$ singuläre Vektorräume. Es ist somit natürlich, singuläre Vektorräume

bis auf Äquivalenz zu bestimmen. Dafür definieren wir die Relation $\sim$ auf der Menge aller singulären Vektorräume durch

$$\mathcal{V} \sim \mathcal{W} \;:\Leftrightarrow\; \exists\, P, Q \in GL_n(K):\; \mathcal{W} = P\mathcal{V}Q \;\text{ oder }\; \mathcal{W} = P\mathcal{V}^T Q. \tag{4}$$

Proposition 2.30: *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation und aus $\mathcal{V} \sim \mathcal{W}$ folgt* $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$.

Beweis. Dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, wird leicht mittels mehrerer Fallunterscheidungen nachgewiesen. Da dies kein lehrreicher, sondern rein technischer Beweis ist, wird er hier ausgelassen. Falls $\mathcal{V} \sim \mathcal{W}$ gilt, existieren $P, Q \in GL_n(K)$ mit (4). Nun sind $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$, $A \mapsto PAQ$ und τ Elemente von $\mathrm{GL}(K^{n,n})$. Somit gilt

$$\dim \mathcal{V} = \dim f(\mathcal{V}) = \dim(P\mathcal{V}Q) \quad \text{und} \quad \dim \mathcal{V} = \dim f(\tau(\mathcal{V})) = \dim(P\mathcal{V}^T Q)\,. \quad \square$$

Jetzt wollen wir uns der angekündigten Verallgemeinerung von Dieudonnés Resultat widmen. Ein singulärer Vektorraum enthält nur Matrizen vom Rang kleiner gleich $n-1$ und hat - wie bereits erwähnt, aber noch nicht bewiesen wurde - höchstens die Dimension $n(n-1)$. Allgemeiner kann man sich fragen, welche Dimension ein singulärer Vektorraum haben kann, wenn er nur Matrizen vom Rang höchstens $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ besitzt. Der Vektorraum aller Matrizen, deren $n-r$ erste Spalten Null sind, ist solch ein Vektorraum. Seine Dimension beträgt offensichtlich $n \cdot r$. Wieder schließt sich die Frage an: Gibt es auch Vektorräume mit größerer Dimension? Die Antwort von [9] lautet „Nein.“, sofern $|K| \geqslant 2r$ gilt. Es gibt dann bis auf Äquivalenz sogar nur einen solchen Vektorraum. Der einzige Unterschied und „Schönheitsfehler“ im Vergleich zu [7] ist, dass der Körper K hinreichend groß sein muss.

Satz 2.31: *Sei $\mathcal{V} \subseteq K^{n,n}$ ein singulärer Vektorraum, $r := \max\{\mathrm{Rang}(A) \mid A \in \mathcal{V}\}$, $r \geqslant 1$ und $|K| \geqslant 2r$. Wenn $\dim \mathcal{V} \geqslant n \cdot r$ gilt, dann ist $\mathcal{V}$ äquivalent zum Vektorraum aller Matrizen, deren erste $n-r$ Spalten Null sind. Insbesondere gilt* $\dim \mathcal{V} = n \cdot r$.

Dieser Satz wird nun in mehreren Schritten hergeleitet. Dazu wird häufig folgende Blockunterteilung einer Matrix $A \in K^{n,n}$ implizit(!) vorgenommen:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \text{ mit } A_{1,1} \in K^{n-r,n-r} \text{ und } A_{2,2} \in K^{r,r}.$$

Da $\mathcal{V}$ in Satz 2.31 nur bis auf Äquivalenz charakterisiert werden soll, können wir stets

$$I_{(r)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$$

annehmen. *Begründung:* Nach Definition von r gibt es eine Matrix $A \in \mathcal{V}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = r$ und da auch $\mathrm{Rang}(I_{(r)}) = r$ gilt, sind A und $I_{(r)}$ äquivalent. Das heißt es gibt $P, Q \in GL_n(K)$ mit $I_{(r)} = PAQ$ und somit ist $I_{(r)}$ in $P\mathcal{V}Q$ - einem zu $\mathcal{V}$ äquivalenten Vektorraum - enthalten.
Mit diesen Überlegungen kommen wir zur folgenden **General-Voraussetzung**:
Sei $\mathcal{V} \subseteq K^{n,n}$ ein singulärer Vektorraum mit $r := \max\{\mathrm{Rang}(A) \mid A \in \mathcal{V}\} \geqslant 1$ und $I_{(r)} \in \mathcal{V}$. Weiter sei $|K| \geqslant 2r$.
Diese Voraussetzung gilt für die kommenden Lemmata bis einschließlich Lemma 2.35. Zudem sei S_m ($m \in \mathbb{N}$) die Menge aller Permutationen auf der Menge $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Lemma 2.32: *Jedes $A \in \mathcal{V}$ hat die Form*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \text{ für geeignete Matrizen } X, Y \text{ und } Z.$$

Beweis. Sei $A = \begin{pmatrix} B & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ und sei $\lambda \in K$. Dann ist auch

$$\begin{pmatrix} B & X \\ Y & Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & X \\ Y & Z - \lambda I_r \end{pmatrix} \in \mathcal{V},$$

da $\mathcal{V}$ ein Vektorraum ist. Weiter gilt nach Definition von r

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} B & X \\ Y & Z - \lambda I_r \end{pmatrix} \leqslant r \qquad \text{für alle } \lambda \in K.$$

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass somit jede $(r+1) \times (r+1)$ Unter-Matrix höchstens Rang r hat bzw. äquivalent dazu die Determinante der Unter-Matrix 0 ist. Dies soll nun ausgenutzt werden, um $B = 0$ zu zeigen. Seien dafür $B = (b_{i,j})$, x_i die i-te Zeile von X und y_j die j-te Spalte von Y. Dann ist für feste i und j

$$(c_{l,m}) = C := \begin{pmatrix} b_{i,j} & x_i \\ y_j & Z - \lambda I_r \end{pmatrix} \in K^{r+1,r+1}$$

solch eine Unter-Matrix und somit gilt $\det C = 0$. Man erkennt, dass $\det C$ ein Polynom vom Grad r in λ ist, denn: Erstens taucht λ in C nur mit Potenz 1 auf, und zwar in $c_{2,2}, c_{3,3}, \ldots, c_{r+1,r+1}$. Zweitens erhält man den Leitterm durch Betrachtung einer Permutation $\sigma \in S_{r+1}$, sodass $\sigma(l) = l$ für alle $l \in \{2, 3, \ldots, r+1\}$ gilt. Doch die Bijektivität von σ erzwingt schon $\sigma = \mathrm{id}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \det(C) &= \prod_{l=1}^{r+1} c_{l,l} + \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+1} \\ \sigma \neq \mathrm{id}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{l=1}^{r+1} c_{l,\sigma(l)} = b_{i,j} \cdot \prod_{l=2}^{r+1} (z_{l-1,l-1} - \lambda) + q_2(\lambda) \\ &= (-1)^r \cdot b_{i,j} \cdot \lambda^r + q_1(\lambda) + q_2(\lambda) \end{aligned}$$

Dabei sind $q_1, q_2 \in K[t]$ mit $\deg q_k \leqslant r - 1$ unabhängig vom gewählten λ! Somit ist gezeigt, dass jedes Element aus K eine Nullstelle vom Polynom

$$p := (-1)^r \cdot b_{i,j} \cdot t^r + q_1(t) + q_2(t) \in K[t]$$

ist. Da p höchstens Grad r hat, kann p auch höchstens r Nullstellen besitzen, es sei denn es ist $p = 0$. Da $|K| \geqslant 2r \geqslant r + 1 > r$ gilt, folgt notwendigerweise $p = 0$. Insbesondere gilt $(-1)^r \cdot b_{i,j} = 0$ und somit $b_{i,j} = 0$.
Die Argumentation gilt für alle fest gewählten $i, j \in \{1, 2, \ldots, n - r\}$ und somit ist $B = 0$ gezeigt. □

Bei genauer Betrachtung des Beweises von Lemma 2.32 erkennt man, dass die Voraussetzung $|K| \geqslant r + 1$ genügt. Jedoch wird $|K| \geqslant 2r$ im folgenden Lemma entscheidend sein.

Lemma 2.33: *Seien X, Y und Z wie in Lemma 2.32. Dann gilt sogar $XZ^kY = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere gilt $XY = 0 = XZY$.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{V}$ mit der Form aus Lemma 2.32 und sei $\lambda \in K$. Es ist bekannt, dass

$$(Z - \lambda I_r) \in GL_n(K) \;\Leftrightarrow\; \lambda \notin \sigma(Z) := \{\mu \in K \mid \mu \text{ ist ein Eigenwert von } Z\}.$$

Für $\lambda \in K \backslash \sigma(Z)$ betrachten wir

$$\begin{pmatrix} I_{n-r} & -X(Z-\lambda I_r)^{-1} \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z - \lambda I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X(Z-\lambda I_r)^{-1}Y & 0 \\ Y & Z - \lambda I_r \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnen wir die Matrizen zur Abkürzung von links nach rechts mit B, C und D. Die Matrix B ist invertierbar, da die Diagonalblöcke von B invertierbar sind. Da invertierbare Matrizen den Rang erhalten und $C \in \mathcal{V}$ ist ($I_{(r)} \in \mathcal{V}$ nach Vor.), folgt $\operatorname{Rang}(D) = \operatorname{Rang}(C) \leqslant r$. Weiter ist

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 0 \\ Z - \lambda I_r \end{pmatrix} = r,$$

denn $Z - \lambda I_r$ hat vollen Rang. Insbesondere sind alle Spalten linear unabhängig. Wäre nun $-X(Z - \lambda I_r)^{-1}Y \neq 0$, so hätte D mindestens $r+1$ linear unabhängige Spalten. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\operatorname{Rang}(D) \leqslant r$.
Somit folgt $-X(Z - \lambda I_r)^{-1}Y = 0$, also gilt

$$\forall\, \lambda \in K \backslash \sigma(Z): \quad X(Z - \lambda I_r)^{-1}Y = 0\,. \tag{5}$$

Wir werden jetzt zeigen, dass dies sogar $Xp(Z)Y = 0$ für alle $p \in K[t]$ und damit insbesondere die Behauptung impliziert.
Hierfür definieren wir $K[Z] := \{p(Z) \mid p \in K[t]\}$. Dies ist ein Unterraum von $K^{r,r}$, da $K[Z]$ das Bild der linearen Abbildung $K[t] \to K^{r,r}$, $p \mapsto p(Z)$ ist. Zudem sei k der Grad des Minimalpolynoms von Z. Mittels der Minimalitätseigenschaft folgt, dass $Z^0, Z^1, \ldots, Z^{k-1}$ linear unabhängig sind. Sie bilden sogar eine Basis von $K[Z]$, da sich Z^k und damit induktiv auch alle höheren Potenzen von Z als Linearkombination von $Z^0, Z^1, \ldots, Z^{k-1}$ schreiben lassen. Somit ist $\dim K[Z] = k$ gezeigt. Des Weiteren ist der Grad des charakteristischen Polynoms von Z größer gleich dem des Minimalpolynoms. Damit gilt $k \leqslant r$.
Da $|\sigma(Z)| \leqslant r$ und $|K| \geqslant 2r$ gelten, folgt $|K \backslash \sigma(Z)| \geqslant r \geqslant k$. (Dies ist der entscheidende Punkt, bei dem die Voraussetzung $|K| \geqslant 2r$ tatsächlich benötigt wird!) Wir können uns also $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \backslash \sigma(Z)$ *paarweise verschieden* wählen.
Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$ fest. Als Folgerung des Satzes von Cayley-Hamilton und dem Aufbau des charakteristischen Polynoms (siehe [18, S. 116, Aufgabe 8.2]) existiert ein $q \in K[t]$ mit $q(Z - \lambda_i I_r) = (Z - \lambda_i I_r)^{-1}$. Durch Ausmultiplizieren erkennt man, dass $q(Z - \lambda_i I_r)$ ein polynomieller Ausdruck in Z ist, das heißt es gibt ein $p \in K[t]$ mit $p(Z) = q(Z - \lambda_i I_r) = (Z - \lambda_i I_r)^{-1}$. Dies zeigt $(Z - \lambda_i I_r)^{-1} \in K[Z]$.
Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir, dass $(Z - \lambda_1 I_r)^{-1}, \ldots, (Z - \lambda_k I_r)^{-1}$ sogar eine Basis von $K[Z]$ ist. Mit (5) folgt dann $Xp(Z)Y = 0$ für alle $p \in K[t]$. Wegen

$\dim K[Z] = k$ genügt es, lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Diese werden wir induktiv zeigen.
Start: $(Z - \lambda_1 I_r)^{-1}$ ist linear unabhängig, da es ungleich $0 \in K^{r,r}$ ist.
Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leqslant m \leqslant k$ gelte, dass $(Z - \lambda_1 I_r)^{-1}, \dots, (Z - \lambda_{m-1} I_r)^{-1}$ linear unabhängig sind.
Induktionsschritt: Seien $c_1, \dots, c_m \in K$ beliebig mit

$$\sum_{i=1}^{m} c_i (Z - \lambda_i I_r)^{-1} = 0. \tag{6}$$

Dann folgt mit (6)

$$0 = \left(\prod_{j=1}^{m} (Z - \lambda_j I_r) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} c_i (Z - \lambda_i I_r)^{-1} \right) = \sum_{i=1}^{m} \Big(c_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (Z - \lambda_j I_r) \Big).$$

Ausmultiplizieren zeigt, dass es sich um einen polynomiellen Ausdruck in Z vom Grad höchstens $m-1$ handelt. Das zugehörige Polynom in der Unbestimmten t ist

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{m} \Big(c_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (t - \lambda_j I_r) \Big) \in K[t]$$

und hat höchstens Grad $m-1$. Der Koeffizient von t^{m-1} ist $c := \sum_{i=1}^{m} c_i$. Angenommen $c \neq 0$. Dann ist $c^{-1}\hat{p}$ ein normiertes Polynom vom Grad $m-1$, das Z annuliert. Doch $m - 1 < k$ und somit stellt dies einen Widerspruch zu dem Fakt dar, dass k der Grad des Minimalpolynoms von Z ist. Deshalb gilt $c = \sum_{i=1}^{m} c_i = 0$.
Dieses Ergebnis liefert mit (6) folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
0 &= (Z - \lambda_m I_r) \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i (Z - \lambda_i I_r)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} c_i (Z - \lambda_m I_r)(Z - \lambda_i I_r)^{-1} \ + \ c_m I_r \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} c_i \big[(Z - \lambda_i I_r) + (\lambda_i I_r - \lambda_m I_r) \big] (Z - \lambda_i I_r)^{-1} \ + \ c_m I_r \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} c_i \big[I_r + (\lambda_i I_r - \lambda_m I_r)(Z - \lambda_i I_r)^{-1} \big] \ + \ c_m I_r \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \right) I_r \ + \ \sum_{i=1}^{m-1} c_i (\lambda_i - \lambda_m) I_r (Z - \lambda_i I_r)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} c_i (\lambda_i - \lambda_m)(Z - \lambda_i I_r)^{-1}.
\end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt für alle $i = 1, \dots, m-1$, dass $(\lambda_i - \lambda_m) c_i = 0$ gilt. Da $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschieden gewählt wurden, ist somit $c_i = 0$ für alle

$i = 1, \ldots, m-1$. Letztlich folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{m} c_i = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \; + \; c_m = 0 + c_m = c_m\,.$$

Damit sind $(Z - \lambda_1 I_r)^{-1}, \ldots, (Z - \lambda_m I_r)^{-1}$ linear unabhängig. Dies beendet den Induktionsbeweis und wie oben begründet auch den gesamten Beweis von Lemma 2.33. □

Als Nächstes soll gezeigt werden, dass

$$\forall\, T \in K^{r,r} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$$

gilt. Dazu betrachten wir folgende Unterräume von $K^{n,n}$

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \text{ für ein } Z \in K^{r,r} \right\}$$

und

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \middle| T \in K^{r,r} \right\} \;\cap\; \mathcal{V}.$$

Lemma 2.34: *Es gilt* $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{F}$.

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{E},\; \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathrm{Bild}(\pi) = \mathcal{E}$ und $\mathrm{Kern}(\pi) = \mathcal{F}$. Somit liefert der Dimensionssatz für π die Gleichung $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{F}$. □

Wir kommen nun zum letzten entscheidenden Schritt beim Beweis von Satz 2.31.

Lemma 2.35: *Es gilt*

$$\forall\, T \in K^{r,r} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \in \mathcal{V}.$$

Beweis. Nach Lemma 2.34 gilt $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{F}$. Ist nun $\dim \mathcal{E} \leqslant (n-r)r$, dann folgt mit $\dim \mathcal{V} \geqslant nr$, dass $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{E} \geqslant nr - (nr - r^2) = r^2$. Da offensichtlich auch $\dim \mathcal{F} \leqslant r^2$ gilt, wäre $\dim \mathcal{F} = r^2$ und somit

$$\mathcal{V} \supseteq \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \middle| T \in K^{r,r} \right\} \text{, also die Behauptung.}$$

Um $\dim \mathcal{E} \leqslant (n-r)r$ zu zeigen, benötigen wir die Vorarbeit von Beispiel 2.9 aus Abschnitt 2.1. Diese erlaubt uns, den Dualraum von

$$\mathcal{X} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in K^{n-r,r}, Y \in K^{r,n-r} \right\}$$

wieder als $\mathcal{X}$ aufzufassen, wobei $G(A) = \mathrm{Spur}(GA)$ für $A \in \mathcal{X}$ und $G \in \mathcal{X}^* = \mathcal{X}$ gilt. Natürlich ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ und somit können wir einerseits den Annihilator $\mathcal{E}^0 \subseteq \mathcal{X}^*$ betrachten und andererseits jede Matrix aus $\mathcal{E}$ als Element von $\mathcal{X}^*$ auffassen.
Seien $E_1 \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}^*$ und $E_2 \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}$ beliebig mit entsprechenden Blockmatrizen X_1, X_2, Y_1, Y_2. Dann ist auch $E_1 + E_2 \in \mathcal{E}$. Somit gibt es $Z_1, Z_2, Z_3 \in K^{r,r}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ Y_1 & Z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & X_1 + X_2 \\ Y_1 + Y_2 & Z_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}.$$

Mit Lemma 2.33 folgt $0 = X_1Y_1 = X_2Y_2 = (X_1 + X_2)(Y_1 + Y_2)$. Daraus folgt

$$X_1Y_2 + X_2Y_1 = (X_1 + X_2)(Y_1 + Y_2) - X_1Y_1 - X_2Y_2 = 0 - 0 - 0 = 0 \in K^{n-r,n-r}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} E_1(E_2) = \mathrm{Spur}(E_1E_2) &= \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} X_1Y_2 & 0 \\ 0 & Y_1X_2 \end{pmatrix} = \mathrm{Spur}(X_1Y_2) + \mathrm{Spur}(Y_1X_2) \\ &= \mathrm{Spur}(X_1Y_2) + \mathrm{Spur}(X_2Y_1) = \mathrm{Spur}(X_1Y_2 + X_2Y_1) = \mathrm{Spur}(0) = 0. \end{aligned}$$

Da E_2 beliebig gewählt wurde, zeigt dies $E_1 \in \mathcal{E}^0$ und somit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^0$. Insbesondere gilt $\dim \mathcal{E} \leqslant \dim \mathcal{E}^0$. Zuletzt folgt

$$2 \dim \mathcal{E} \leqslant \dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{E}^0 = \dim \mathcal{X} = 2(n - r)r,$$

also $\dim \mathcal{E} \leqslant (n - r)r$. □

Mit all diesen Vorarbeiten ist es nicht mehr schwer Satz 2.31 zu zeigen.

Beweis von Satz 2.31. Da es sich um eine Aussage bis auf Äquivalenz bezüglich $\sim$ handelt, können wir annehmen, dass $I_{(r)} \in \mathcal{V}$ gilt (vgl. Ausführungen vor Lemma 2.32).
Sei $A \in \mathcal{V}$ beliebig. Nach Lemma 2.32 gibt es Matrizen X, Y und Z mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt für $T \in K^{r,r}$ nach Lemma 2.35, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \text{ ist und somit auch } \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z + T \end{pmatrix} \in \mathcal{V}.$$

Nach Lemma 2.33 gilt $XZY = 0$, sowie

$$0 = X(Z + T)Y = XZY + XTY = 0 + XTY = XTY.$$

Da dies für alle $T \in K^{r,r}$ gilt, folgt $X = 0$ oder $Y = 0$. Folglich ist jedes Element aus $\mathcal{V}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & Z \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & \hat{Z} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Angenommen es gibt $X \neq 0$, $Y \neq 0$ und $Z, \hat{Z} \in K^{r,r}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & Z \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & \hat{Z} \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \text{ gilt.}$$

Dann wäre auch

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & \hat{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ Y & Z+\hat{Z} \end{pmatrix} \in \mathcal{V},$$

was im direkten Widerspruch zu (7) steht. Somit sind alle Elemente von $\mathcal{V}$ *entweder* von der linken *oder* von der rechten Form in (7).
Im ersten Fall muss es sich bei $\mathcal{V}$ wegen $\dim \mathcal{V} \geqslant nr$ um den Vektorraum aller Matrizen, deren erste $n-r$ Spalten Null sind, handeln.
Im zweiten Fall ist $\mathcal{V}^T$ aus demselben Grund der Vektorraum aller Matrizen, deren erste $n-r$ Spalten Null sind. Der Beweis wird durch die Äquivalenz von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}^T$ beendet. □

Als Spezialfall dieses Satzes erhalten wir

Satz 2.36: *Sei $|K| \geqslant 2(n-1)$. Jeder lineare Teilraum von Σ_n hat eine Dimension von höchstens $n(n-1) = n^2 - n$ und diejenigen mit Dimension gleich $n^2 - n$ sind maximale Ideale von $K^{n,n}$.*

Beweis. Für den ersten Teil sei $\mathcal{V} \subseteq \Sigma_n$ ein Vektorraum mit $\dim \mathcal{V} \geqslant n(n-1)$. Wir setzen $r := \max\{\operatorname{Rang}(A) \mid A \in \mathcal{V}\}$. Aus $\mathcal{V} \subseteq \Sigma_n$ folgt dann $n-1 \geqslant r$ und somit gilt $\dim \mathcal{V} \geqslant n(n-1) \geqslant nr$. Mit Satz 2.31 ist $\dim \mathcal{V} = nr$. Folglich gilt $nr \geqslant n(n-1) \geqslant nr$, also $r = n-1$ und $\dim \mathcal{V} = n(n-1)$.
Sei nun $\mathcal{V} \subseteq \Sigma_n$ ein Vektorraum mit $\dim \mathcal{V} = n(n-1)$ und r wie eben. Es folgt wieder $r = n-1$ und somit gilt $\dim \mathcal{V} = nr$. Nach Satz 2.31 ist $\mathcal{V}$ äquivalent zu $\mathcal{L}_n$ - dem Vektorraum aller Matrizen, deren erste (da $n-(n-1) = 1$) Spalte Null ist. Das heißt es existieren Matrizen $P, Q \in GL_n(K)$ mit $\mathcal{V} = P\mathcal{L}_n Q$ oder $\mathcal{V} = P\mathcal{L}_n^T Q = P\mathcal{R}_n Q$.
Im ersten Fall folgt $\mathcal{V} = (P\mathcal{L}_n)Q = \mathcal{L}_n Q$ und da $\mathcal{L}_n$ ein Linksideal ist, folgt, dass auch $\mathcal{L}_n Q = \mathcal{V}$ ein Linksideal ist. Mit $\dim \mathcal{V} = n(n-1)$ und Korollar 2.22 ist $\mathcal{V}$ sogar maximal.
Im zweiten Fall ist $\mathcal{V} = P(\mathcal{R}_n Q) = P\mathcal{R}_n$ und da $\mathcal{R}_n$ ein Rechtsideal ist, ist auch $P\mathcal{R}_n = \mathcal{V}$ ein Rechtsideal. Nach Satz 2.21 und $\dim \mathcal{V} = n(n-1)$ ist $\mathcal{V}$ sogar ein maximales Rechtsideal. □

Bemerkung 2.37*:* Die Voraussetzung $|K| \geqslant 2(n-1)$ in Satz 2.36 kann laut [7, Théorème 1] fallen gelassen werden.

In Verbindung mit Satz 2.21 bzw. Korollar 2.22 wurde damit das folgende wichtige Theorem bewiesen.

Theorem 2.38:
Die maximalen Ideale von $K^{n,n}$ sind genau die linearen Teilräume maximaler Dimension von Σ_n.

An Hand von Beispielen sollen nun konkret alle linearen Teilräume maximaler Dimension von Σ_2 bestimmt werden, und es soll aufgezeigt werden, dass im Allgemeinen nicht jeder maximal singuläre Vektorraum auch ein singulärer Vektorraum maximaler Dimension ist.

Beispiel 2.39: Lineare Teilräume maximaler Dimension von Σ_2
Sei $\mathcal{V}$ ein linearer Teilraum maximaler Dimension von Σ_2, also $\dim \mathcal{V} = 2^2 - 2 = 2$. Da stets $|K| \geqslant 2(2-1) = 2$ gilt, ist $\mathcal{V}$ nach Satz 2.36 ein maximales Ideal von $K^{2,2}$. Falls $\mathcal{V}$ ein maximales Linksideal ist, gibt es nach Korollar 2.28 ein $P = (p_{i,j}) \in GL_2(K)$ mit $\mathcal{V}P^{-1} = \mathcal{L}_2$ bzw. $\mathcal{L}_2 P = \mathcal{V}$. Da

$$\mathcal{L}_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gilt, folgt

$$\mathcal{V} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Dabei ist $(p_{2,1}, p_{2,2}) \in K^2 \backslash \{0\}$, da $P \in GL_2(K)$ gilt.

Falls $\mathcal{V}$ ein maximales Rechtsideal ist, so existiert nach Korollar 2.28 eine Matrix $Q = (q_{i,j}) \in GL_2(K)$ mit $Q\mathcal{R}_2 = \mathcal{V}$. Aus

$$\mathcal{R}_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

folgt

$$\mathcal{V} = \operatorname{Span}\left\{ Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} q_{1,2} & 0 \\ q_{2,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} \\ 0 & q_{2,2} \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $(q_{1,2}, q_{2,2}) \in K^2 \backslash \{0\}$ gilt.
Auf diese konkrete Bestimmung werden wir im Beweis des Falles $n = 2$ von Theorem 2.13 zurück kommen (siehe Abschnitt 3.2).

Beispiel 2.40: Weitere maximal singuläre Vektorräume
Sei K ein Körper mit Charakteristik ungleich 2, das heißt $1 + 1 \neq 0$. Weiter sei n ungerade mit $n \geqslant 3$. Es bezeichne $\mathcal{SS}_n \subseteq K^{n,n}$ den Vektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen. Für $S \in \mathcal{SS}_n$ zeigt die Rechnung

$$\det(S) = \det(S^T) = \det(-S) = (-1)^n \det(S) = -\det(S)$$

dass $(1 + 1)\det(S) = 0$ und somit $\det(S) = 0$ gilt. Daraus folgt $\mathcal{SS}_n \subseteq \Sigma_n$, das heißt $\mathcal{SS}_n$ ist singulär. Nach [9, S. 261, Proposition 5] ist $\mathcal{SS}_n$ sogar maximal singulär. Jedoch handelt es sich bei $\mathcal{SS}_n$ nicht um einen singulären Raum maximaler Dimension, denn für $n \geqslant 3$ gilt

$$\dim \mathcal{SS}_n = \frac{n(n-1)}{2} < n(n-1) = n^2 - n.$$

Ein weiteres Beispiel eines maximal singulären Raumes ist für $n \geqslant 3$ und allgemeines K der Vektorraum aller $n \times n$ - Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Auch dieser ist auf Grund von $n^2 - 2n + 2 < n^2 - n$ für $n \geqslant 3$ nicht singulär von maximaler Dimension. Der Raum ist ein Spezialfall des allgemein gehaltenen Beispiels eines maximal singulären Vektorraumes in [9, S. 261, Proposition 4].
Diese wichtigen Beispiele zeigen, dass die Menge der maximal singulären Räume im Allgemeinen echt größer ist (zumeist sogar „deutlich" größer), als die Teilmenge der singulären Räume maximaler Dimension.

Jetzt können wir den Kreis zur Motivation am Ende von Abschnitt 2.3 schließen. Ein $f \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ mit $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ bildet die singulären Räume maximaler Dimension wieder auf die singulären Räume maximaler Dimension ab, bzw. mit Theorem 2.38 ergibt sich

Satz 2.41: *Sei $f \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ mit $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$. Dann bildet f die maximalen Ideale von $K^{n,n}$ bijektiv auf die maximalen Ideale von $K^{n,n}$ ab.*

Beweis. Da $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ bzw. $\Sigma_n = f^{-1}(\Sigma_n)$ gilt, bildet die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls alle maximalen Ideale auf maximale Ideale ab. Die Zuordnungen zwischen den maximalen Idealen, die von f und f^{-1} induziert werden, sind invers zueinander. Damit bildet f die maximalen Ideale *bijektiv* auf die maximalen Ideale ab. □

Indem wir uns an das Schnittverhalten von maximalen Idealen erinnern (Lemma 2.29), können wir sogar nachweisen, dass dies „gleichmäßig" geschieht.

Satz 2.42: *Sei $f \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ mit der Eigenschaft $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$. Dann gilt* entweder

1. *f bildet die maximalen Linksideale bijektiv auf die maximalen Linksideale, sowie die maximalen Rechtsideale bijektiv auf die maximalen Rechtsideale ab.* oder
2. *f bildet die maximalen Linksideale bijektiv auf die maximalen Rechtsideale und umgekehrt ab.*

Beweis. Seien $\mathcal{J}, \mathcal{L}$ zwei verschiedene maximale Linksideale von $K^{n,n}$. Dann gilt nach Lemma 2.29 $\dim \mathcal{J} \cap \mathcal{L} = n^2 - 2n$. Mit der Bijektivität von f folgt

$$\dim f(\mathcal{J}) \cap f(\mathcal{L}) = \dim f(\mathcal{J} \cap \mathcal{L}) = \dim \mathcal{J} \cap \mathcal{L} = n^2 - 2n.$$

Somit müssen $f(\mathcal{J})$ und $f(\mathcal{L})$ maximale Ideale vom selben Typ (links oder rechts) sein, da der Schnitt eines maximalen Links- und eines maximalen Rechtsideals stets Dimension $(n-1)^2$ hat und $n^2 - 2n \neq (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$ gilt. Da $\mathcal{J}$ und $\mathcal{L}$ beliebig gewählt sind, werden alle maximalen Linksideale auf denselben Idealtyp (wir nennen ihn Typ 1) abgebildet.

Ganz analog werden alle maximalen Rechtsideale auf genau einen Idealtyp (Typ 2) abgebildet. Sei $\mathcal{R}$ ein maximales Rechtsideal. Nach Lemma 2.29 gilt $\dim \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = (n-1)^2$ und somit

$$\dim f(\mathcal{L}) \cap f(\mathcal{R}) = \dim f(\mathcal{L} \cap \mathcal{R}) = \dim \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = (n-1)^2.$$

Demzufolge muss der Typ von $f(\mathcal{L})$ (Typ 1) verschieden vom Typ von $f(\mathcal{R})$ (Typ 2) sein.
Da f die maximalen Ideale *bijektiv* auf die maximalen Ideale abbildet (Satz 2.41), bildet f die maximalen Links- bzw. Rechtsideale jeweils *bijektiv* auf maximale Ideale vom Typ 1 bzw. Typ 2 ab. $\square$

Damit wurden in Kapitel 2 schon mehrere Schritte von Dieudonnés Beweis von Théorème 3 in [7, S. 286 und 287] ausgearbeitet. Um den Beweis von Theorem 2.13 zu beenden, werden sowohl im Fall $n = 2$ als auch im Fall $n \geqslant 3$ Methoden aus der projektiven Geometrie verwendet.

3 Methoden der projektiven Geometrie

3.1 Grundlagen der projektiven Geometrie

Diese kurze Wiederholung ist stark an [29, S. 457 - 465] orientiert. Im Folgenden ist $\mathcal{V}$ stets ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

Definition 3.1 ([29, S. 457, 12.2.1 Definition])**:** Die Menge aller Geraden von $\mathcal{V}$ ist der **projektive Raum** $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ und wir setzen $\dim \mathbb{P}(\mathcal{V}) = \dim \mathcal{V} - 1$. Speziell für $\mathcal{V} = K^{n+1}$ ist $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(K^{n+1})$. Ist $\mathcal{V} = \{0\}$, so ist sinnvollerweise $\mathbb{P}(\mathcal{V}) := \emptyset$ und $\dim \emptyset = -1$.
Eine Teilmenge $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{V})$ heißt (projektiver) Unterraum von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$, falls es einen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{X} = \mathbb{P}(\mathcal{U})$ gibt. Ein projektiver (Unter-)Raum der Dimension 1 heißt **projektive Gerade** und einer der Dimension 2 heißt **projektive Ebene**.

Die Punkte von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ sind also die Geraden von $\mathcal{V}$. Da jede Gerade von $\mathcal{V}$ die Form $\langle v \rangle$ für ein $v \in \mathcal{V}\backslash\{0\}$ hat und für $w \in \mathcal{V}\backslash\{0\}$ genau dann $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ gilt, wenn es ein $\lambda \in K\backslash\{0\}$ mit $v = \lambda w$ gibt, können wir $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ als Menge von Äquivalenzklassen schreiben. Dazu führen wir folgende Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V} \backslash \{0\}$ ein:

$$v \sim w \;:\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda \in K\backslash\{0\} : \; v = \lambda w$$

Die Äquivalenzklasse von v wird mit $[v]$ bezeichnet und repräsentiert $\langle v \rangle$. Somit ist $\mathbb{P}(\mathcal{V}) = (\mathcal{V}\backslash\{0\})\,/\!\sim$. Für $x = (x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$ schreiben wir ausführlich $[x_0 : \ldots : x_n] := [x] \in \mathbb{P}^n$. Dabei sind $[x_0 : \ldots : x_n]$ die homogenen Koordinaten von $[x]$, welche nur bis auf Multiplikation mit einem $\lambda \in K\backslash\{0\}$ eindeutig sind. Trotzdem kann man mit diesen in gewisser Weise rechnen, was (wie z. B. in Abschnitt 3.2) vereinfachend wirken kann.

Definition 3.2 ([29, 12.2.3 Definition und Satz])**:** Seien $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ Unterräume von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$, etwa $\mathcal{X}_i = \mathbb{P}(\mathcal{U}_i)$ für Unterräume $\mathcal{U}_i$ von $\mathcal{V}$. Weiter sei $[\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k] \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{V})$ der kleinste Unterraum, der $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ enthält. Dieser heißt **projektive Hülle** von $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ und es gilt $[\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k] = \mathbb{P}(\mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_k)$.

Zudem benötigen wir das Analogon der projektiven Geometrie zu den linearen Abbildungen. Sei dazu $f \in \mathscr{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$. Für alle $\lambda \in K\backslash\{0\}$ gilt $[f(\lambda v)] = [\lambda f(v)] = [f(v)]$. Somit legt die lineare Abbildung f die Definition der Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V}),\ [v] \mapsto [f(v)]$ nahe. Diese Definition ist wie eben gezeigt unabhängig vom Repräsentanten von $[v]$. Jedoch können wir $[f(v)]$ nur betrachten, falls $f(v) \neq 0$ gilt. Somit muss f injektiv und folglich bijektiv sein, damit φ wohldefiniert ist.

Definition 3.3: Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ heißt **projektiv(-linear)**, falls sie von einem $f \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ induziert wird. Dies meint, dass $\varphi([v]) = [f(v)]$ für alle $[v] \in \mathbb{P}(\mathcal{V})$ gilt.

Als direkte Folgerung der Definition sind projektive Abbildungen $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ bijektiv und bilden eine Gruppe ([29, 12.2.17 Satz]), welche üblicherweise mit $PGL(\mathcal{V})$ bezeichnet wird.

Lemma 3.4: *Seien $f, g \in \mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Dann gilt*

1. *f und g induzieren dieselbe projektive Abbildung genau dann, wenn $f = \lambda g$ für ein $\lambda \in K\backslash\{0\}$ gilt.*
2. *Eine projektiv-lineare Abbildung $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ bildet projektive Unterräume auf projektive Unterräume derselben Dimension ab.*

Hierbei ist der 1. Teil des Lemmas eine Folgerung von $PGL(\mathcal{V}) \cong GL(\mathcal{V})/K^*$ aus [29, 12.2.18 Satz]. Der 2. Teil ist genau [29, 12.2.19 Satz].
Jede lineare Abbildung von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{V}$ ist eindeutig bestimmt auf einer Basis. Dieses Resultat überträgt sich in gewisser Weise auf projektive Abbildungen. Zur Vorbereitung dieses Satzes 3.8 führen wir die zwei folgenden Definitionen ein.

Definition 3.5 ([29, 12.2.5 Definition])**:** Sei $n := \dim \mathbb{P}(\mathcal{V})$ und sei $k \leqslant n+1$. Die Punkte $[v_1], \ldots, [v_k]$ von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ heißen **unabhängig** bzw. **Punkte in allgemeiner Lage**, falls $\dim \big[\, [v_1], \ldots, [v_k] \,\big] = k - 1$ gilt.

Offensichtlich sind $[v_1], \ldots, [v_k] \in \mathbb{P}(\mathcal{V})$ für $k \leqslant n+1$ genau dann unabhängig, wenn die Repräsentanten $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind ([29, 12.2.6 Satz]).

Definition 3.6 ([2, S. 125])**:** Ein System $\big([v_1], \ldots, [v_{n+2}]\big)$ von $n+2$ Punkten des n-dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ nennt man einen **geordneten Rahmen**, falls jede Auswahl von $n+1$ Punkten aus dem System unabhängig ist.

Beispiel 3.7: Ein geordneter Rahmen von $\mathbb{P}^n$
Es ist

$$\big([1:0:\ldots:0], [0:1:0:\ldots:0], \ldots, [0:\ldots:0:1], [1:1:\ldots:1]\big)$$

ein geordneter Rahmen von $\mathbb{P}^n$, da jede Auswahl von $n+1$ Vektoren der Menge

$$\big\{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1), (1,1,\ldots,1)\big\}$$

linear unabhängig in K^{n+1} ist.

Satz 3.8 ([29, 12.2.23 Satz])**:** *Seien $\big([v_1], \ldots, [v_{n+2}]\big)$ und $\big([w_1], \ldots, [w_{n+2}]\big)$ zwei geordnete Rahmen vom n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}(\mathcal{V})$. Dann gibt es genau eine projektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ mit $\varphi\big([v_i]\big) = [w_i]$ für alle $i = 1, \ldots, n+2$.*

Alternativ findet man diesen Satz in [2, S. 126, 3.6.3 Korollar].

3.2 Der Fall $n = 2$

In diesem Abschnitt soll Theorem 2.13 für $n = 2$ bewiesen werden. Dabei stammen die grundlegenden geometrischen Ideen, welche hier genau ausgeführt werden, von B. van der Waerden aus [26, S. 19 u. 20].

Sei $f \in \mathrm{GL}(K^{2,2})$ mit $f(\Sigma_2) = \Sigma_2$. Nach Satz 2.42 bildet f entweder die maximalen Links- bzw. Rechtsideale bijektiv auf die maximalen Links- bzw. Rechtsideale ab oder f bildet maximale Linksideale bijektiv auf maximale Rechtsideale und umgekehrt ab. Im ersten Fall setzen wir $\bar{f} := f$ und im zweiten Fall $\bar{f} := \tau_2 \circ f$, wobei

$\tau_2 : K^{2,2} \to K^{2,2}$ die Transposition ist. Damit bildet $\bar{f}$ maximale Linksideale bijektiv auf maximale Linksideale ab, sowie maximale Rechtsideale bijektiv auf maximale Rechtsideale. Zudem gilt $\bar{f}(\Sigma_2) = \Sigma_2$, da (im zweiten Fall) auch $\tau_2(\Sigma_2) = \Sigma_2$ ist. Unter Verwendung des Isomorphismus κ_2 können wir $\bar{f}$ als Abbildung von K^4 nach K^4 auffassen. Damit induziert $\bar{f}$ eine projektive Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$.
Da $t_1t_4 + t_2t_3 \in K[t_1, \ldots, t_4]$ ein homogenes Polynom vom Grad 2 ist, ist

$$S := \Sigma_2^{\mathbb{P}} := \big\{[w_{1,1} : w_{1,2} : w_{2,1} : w_{2,2}] \in \mathbb{P}^3 \mid w_{1,1}w_{2,2} - w_{1,2}w_{2,1} = 0\big\}$$

wohldefiniert und die projektive Entsprechung von $\Sigma_2 \subseteq K^4 \cong K^{2,2}$. Die homogenen Koordinaten in der Definition von S wurden bewusst so gewählt, dass die Identifikation von $K^{2,2}$ mit K^4 unter κ_2 noch einmal verdeutlicht wird.
Aus $\bar{f}(\Sigma_2) = \Sigma_2$ folgt direkt $\varphi(S) = S$. Damit haben wir das Setting in den $\mathbb{P}^3$ übertragen.
Wir wollen nun S genauer betrachten. Dazu verwenden wir den einfachsten Fall der so genannten Segre-Einbettung:

$$\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3, \quad \sigma\big([\lambda_1 : \lambda_2], [\mu_1 : \mu_2]\big) = [\lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_1 : \lambda_2\mu_2].$$

Es ist bekannt, dass σ wohldefiniert und injektiv ist, sowie, dass $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = S$ gilt. Beweise findet man in jedem einführenden Lehrbuch der Algebraischen Geometrie, z. B. in [14, S. 73f.]. Mit σ können wir S sehr gut geometrisch anschauen. Zum Beispiel erkennt man, dass es zwei Geradenscharen auf S gibt:

$$g_{[\lambda]} := \sigma\big(\{[\lambda]\} \times \mathbb{P}^1\big) \quad \text{und} \quad h_{[\mu]} := \sigma\big(\mathbb{P}^1 \times \{[\mu]\}\big) \quad \text{für } [\lambda], [\mu] \in \mathbb{P}^1.$$

Dabei werden wir auch von Geraden vom Typ g bzw. Typ h sprechen. Eine genaue Betrachtung von $g_{[\lambda]}$ und $h_{[\mu]}$ zeigt, warum es sich tatsächlich um Geraden des $\mathbb{P}^3$ handelt. Außerdem ist eine bijektive Korrespondenz zu den maximalen Links- und Rechtsidealen von Σ_2 (vgl. Beispiel 2.39) zu erkennen.

$$\begin{aligned}
g_{[\lambda]} &= \Big\{[\lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_1 : \lambda_2\mu_2] \in \mathbb{P}^3 \,\Big|\, [\mu_1 : \mu_2] = [\mu] \in \mathbb{P}^1\Big\} \\
&= \Big\{\big[\mu_1(\lambda_1, 0, \lambda_2, 0) + \mu_2(0, \lambda_1, 0, \lambda_2)\big] \,\Big|\, (\mu_1, \mu_2) \in K^2 \backslash \{0\}\Big\} \\
&= \mathbb{P}\Big(\operatorname{Span}\big\{(\lambda_1, 0, \lambda_2, 0), (0, \lambda_1, 0, \lambda_2)\big\}\Big) \\
&\qquad \text{damit Korrespondenz zum max. Rechtsideal } \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ \lambda_2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right\}; \\
h_{[\mu]} &= \Big\{[\lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_1 : \lambda_2\mu_2] \in \mathbb{P}^3 \,\Big|\, [\lambda_1 : \lambda_2] = [\lambda] \in \mathbb{P}^1\Big\} \\
&= \Big\{\big[\lambda_1(\mu_1, \mu_2, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, \mu_1, \mu_2)\big] \,\Big|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in K^2 \backslash \{0\}\Big\} \\
&= \mathbb{P}\Big(\operatorname{Span}\big\{(\mu_1, \mu_2, 0, 0), (0, 0, \mu_1, \mu_2)\big\}\Big) \\
&\qquad \text{damit Korrespondenz zum max. Linksideal } \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ \mu_1 & \mu_2\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass jedes maximale Links- bzw. Rechtsideal von $K^{2,2}$ von der Form

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ \mu_1 & \mu_2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ \lambda_2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right\}$$

ist (siehe Beispiel 2.39), wobei $(\mu_1, \mu_2), (\lambda_1, \lambda_2) \in K^2 \backslash \{0\}$ *nur eindeutig bis auf ein Vielfaches* aus $K \backslash \{0\}$ sind. Dieser Fakt sichert die Bijektivität der Korrespondenz. Aus Abschnitt 2.4 wissen wir, dass dies schon alle linearen Teilräume maximaler Dimension von Σ_2 sind. Somit enthält S keine projektive Ebene und alle Geraden von S sind entweder vom Typ g oder vom Typ h.
Nach Konstruktion von $\bar{f}$ bildet φ die Geraden vom Typ g bijektiv auf die Geraden vom Typ g ab und analog für Geraden vom Typ h. Demzufolge gibt es bijektive Abbildungen $\alpha, \beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ mit $\varphi(g_{[\lambda]}) = g_{\alpha([\lambda])}$ und $\varphi(h_{[\mu]}) = h_{\beta([\mu])}$ für alle $[\lambda], [\mu] \in \mathbb{P}^1$.
Als Nächstes soll gezeigt werden, dass die bijektiven Abbildungen α und β sogar projektiv sind.
Alle $[\lambda_1 : 0 : \lambda_2 : 0]$ mit $[\lambda] = [\lambda_1 : \lambda_2] \in \mathbb{P}^1$ bilden die projektive Gerade $h_{[1:0]}$. Damit liegen die Bilder $\varphi\big([\lambda_1 : 0 : \lambda_2 : 0]\big)$ *alle* auf $h_{[\nu]}$ mit $[\nu_1 : \nu_2] := \beta\big([1 : 0]\big)$. Zudem liegt $\varphi\big([\lambda_1 : 0 : \lambda_2 : 0]\big)$ auch auf $g_{\alpha([\lambda])}$ und ist somit der eindeutige Schnittpunkt von $h_{[\nu]}$ und $g_{\alpha([\lambda])}$. Mit $[\lambda'] = [\lambda'_1 : \lambda'_2] := \alpha\big([\lambda]\big)$ folgt

$$\varphi\big([\lambda_1 : 0 : \lambda_2 : 0]\big) = [\lambda'_1\nu_1 : \lambda'_1\nu_2 : \lambda'_2\nu_1 : \lambda'_2\nu_2].$$

Entscheidend ist, dass $[\nu]$ unabhängig vom gewählten $[\lambda]$ ist. O. B. d. A. sei $\nu_1 \neq 0$. Wir setzen $\xi_1 = \lambda_1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \lambda_2$, $\xi_4 = 0$. Sei $C = (c_{i,j}) \in K^{4,4}$ die zu $\bar{f}$ gehörige Matrix, das heißt es gilt $\bar{f}(x) = Cx$ für alle $x \in K^4$. Da φ von $\bar{f}$ induziert wird, folgt

$$\begin{aligned}
\varphi\big([\lambda_1 : 0 : \lambda_2 : 0]\big) &= [\lambda'_1\nu_1 : \lambda'_1\nu_2 : \lambda'_2\nu_1 : \lambda'_2\nu_2] \\
&= \varphi\big([\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4]\big) \\
&= \left[\sum_{j=1}^{4} c_{1,j} \cdot \xi_j : \sum_{j=1}^{4} c_{2,j} \cdot \xi_j : \sum_{j=1}^{4} c_{3,j} \cdot \xi_j : \sum_{j=1}^{4} c_{4,j} \cdot \xi_j\right] \\
&= \big[c_{1,1}\lambda_1 + c_{1,3}\lambda_2 : c_{2,1}\lambda_1 + c_{2,3}\lambda_2 : c_{3,1}\lambda_1 + c_{3,3}\lambda_2 : c_{4,1}\lambda_1 + c_{4,3}\lambda_2\big].
\end{aligned}$$

Aus $\nu_1 \neq 0$ folgt, dass $\lambda'_1\nu_1 \neq 0$ oder $\lambda'_2\nu_1 \neq 0$ gilt. Folglich können wir $[\lambda'_1\nu_1 : \lambda'_2\nu_1]$ betrachten und es gilt

$$\alpha\big([\lambda]\big) = [\lambda'_1 : \lambda'_2] = [\lambda'_1\nu_1 : \lambda'_2\nu_1] = [c_{1,1}\lambda_1 + c_{1,3}\lambda_2 : c_{3,1}\lambda_1 + c_{3,3}\lambda_2].$$

Dies gilt für alle $[\lambda] \in \mathbb{P}^1$, also wird α von der linearen Abbildung $K^2 \to K^2,\ x \mapsto Ax$ induziert, wobei

$$(a_{i,j}) = A := \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,3} \\ c_{3,1} & c_{3,3} \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Insgesamt ist A zwangsläufig invertierbar und α projektiv.
Analoges Vorgehen mittels Betrachtung der Geraden $g_{[1:0]}$ und aller $[\mu_1 : \mu_2 : 0 : 0]$ mit $[\mu] = [\mu_1 : \mu_2] \in \mathbb{P}^1$ zeigt, dass β projektiv ist und dass es eine invertierbare Matrix $B = (b_{i,j}) \in K^{2,2}$ mit

$$\beta\big([\mu]\big) = \big[b_{1,1} \cdot \mu_1 + b_{1,2} \cdot \mu_2\ :\ b_{2,1} \cdot \mu_1 + b_{2,2} \cdot \mu_2\big]$$

gibt.
Sei nun $[w] = [w_{1,1} : w_{1,2} : w_{2,1} : w_{2,2}] \in S$ beliebig. Da $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = S$ gilt und σ injektiv ist, existieren eindeutige $[\lambda] = [\lambda_1 : \lambda_2], [\mu] = [\mu_1 : \mu_2] \in \mathbb{P}^1$ mit

$$[w] = \sigma\big([\lambda_1 : \lambda_2], [\mu_1 : \mu_2]\big) = [\lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_1 : \lambda_2\mu_2].$$

Durch geeignete Normierung der homogenen Koordinaten können wir $w_{i,j} = \lambda_i \mu_j$ annehmen. $[w]$ ist der Schnittpunkt von $g_{[\lambda]}$ und $h_{[\mu]}$. Folglich ist $\varphi\big([w]\big)$ der Schnittpunkt von $g_{\alpha([\lambda])}$ und $h_{\beta([\mu])}$. Mit $\alpha([\lambda]) =: [\lambda_1' : \lambda_2']$ und $\beta([\mu]) =: [\mu_1' : \mu_2']$ ist

$$\varphi\big([w]\big) = \big[\lambda_1'\mu_1' : \lambda_1'\mu_2' : \lambda_2'\mu_1' : \lambda_2'\mu_2'\big].$$

Daraus folgt für $i, j \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} w_{i,j}' := \lambda_i'\mu_j' &= \left(\sum_{k=1}^{2} a_{i,k} \cdot \lambda_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{2} b_{j,l} \cdot \mu_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} a_{i,k} \cdot b_{j,l} \cdot w_{k,l} = \sum_{k=1}^{2} a_{i,k} \cdot \left(\sum_{l=1}^{2} w_{k,l} \cdot b_{j,l}\right). \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, dass die von $f_2 : K^{2,2} \to K^{2,2},\ W \mapsto AWB^T$ induzierte projektive Abbildung ψ mit φ auf $S = \Sigma_2^{\mathbb{P}}$ überein stimmt. Insbesondere stimmen ψ und φ auf dem geordneten Rahmen (vgl. Beispiel 3.7)

$$\Big([1:0:0:0], [0:1:0:0], [0:0:1:0], [0:0:0:1], [1:1:1:1]\Big)$$

- dessen Elemente alle in $S = \Sigma_2^{\mathbb{P}}$ liegen - überein. Nach Satz 3.8 gilt damit $\psi = \varphi$.
Aus Lemma 3.4 folgt $\bar{f} = cf_2$ für ein $c \in K \setminus \{0\}$.
Falls $\bar{f} = f$ gilt, ist $f(X) = PXQ$ für alle $X \in K^{2,2}$ mit $P = cA$ und $Q = B^T$ aus $GL_2(K)$.
Falls $\bar{f} = \tau_2 \circ f$ bzw. $\tau_2 \circ \bar{f} = f$ ist, so gilt $f(X) = PX^TQ$ für alle $X \in K^{2,2}$. Dabei sind $P = B$ und $Q = cA^T$ invertierbar.
Insgesamt ist Theorem 2.13 für $n = 2$ bewiesen.

Es ist deutlich geworden, dass die Segre-Einbettung die wichtige geometrische Komponente zum Betrachten des Problems für $n = 2$ geliefert hat. Im Fall $n \geqslant 3$ ist Σ_n allerdings nicht mehr das Bild einer Segre-Einbettung. Deshalb kann eine Segre-Einbettung nicht mehr benutzt werden. Stattdessen wird ein zentraler Satz aus der projektiven Geometrie verwendet, der häufig (u.a. auch von Dieudonné in [7]) als Fundamentalsatz der projektiven Geometrie bezeichnet wird. Dieser Satz charakterisiert alle so genannten Kollineationen eines projektiven Raumes $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ mit $\dim \mathbb{P}(\mathcal{V}) \geqslant 2$.

3.3 Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

Auch in diesem Abschnitt sei $\mathcal{V}$ stets ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

Definition 3.9: Eine Abbildung $g : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ heißt Kollineation, wenn g bijektiv ist und g die Geraden von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ bijektiv auf die Geraden von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ abbildet.

Äquivalent ist g genau dann eine Kollineation, wenn g bijektiv ist und 3 kollineare Punkte von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ stets auf 3 kollineare Punkte abgebildet werden. (3 Punkte heißen kollinear, falls sie auf einer gemeinsamen Gerade liegen.)
Ist $\dim \mathbb{P}(\mathcal{V}) = 1$ so ist $g : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ genau dann eine Kollineation, wenn g

bijektiv ist. Die Charakterisierung ist in diesem Fall somit nicht sehr interessant. Zudem kann es sehr „wilde“ Kollineationen ohne jegliche Struktur geben. Sei im Folgenden also $\dim \mathbb{P}(\mathcal{V}) \geqslant 2$.
Mit dem 2. Teil von Lemma 3.4 folgt, dass jede projektive Abbildung $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ eine Kollineation ist. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, wie das folgende Beispiel illustriert.

Beispiel 3.10: Eine Kollineation, die nicht projektiv ist
Sei $K = \mathbb{C}$, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ und $\overline{w}$ die komplex Konjugierte von $w \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Abbildung

$$g : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2,\ [z] = [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [\overline{z_0} : \overline{z_1} : \overline{z_2}] =: [\overline{z}].$$

Es ist leicht zu sehen, dass g wohldefiniert ist. Das heißt, dass $g\big([z]\big)$ unabhängig vom Repräsentanten $z \in \mathbb{C}^3$ ist. Zudem ist g selbstinvers, also insbesondere bijektiv.
Die Abbildung g bildet (projektive) Geraden wieder auf Geraden ab. Sei dazu $\mathbb{P}(U)$ eine Gerade von $\mathbb{P}^2$ bzw. $\mathcal{U}$ ein 2-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{C}^3$. Ist $\{y, z\}$ eine Basis von $\mathcal{U}$, so ist $\mathbb{P}(U)$ eindeutig durch $[y], [z] \in \mathbb{P}^2$ gegeben und jeder Punkt von $\mathbb{P}(U)$ hat die Form $[y + \lambda z]$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ oder der Punkt ist $[z]$.
Nun ist $g(\mathbb{P}(U))$ die Gerade durch $[\overline{y}]$ und $[\overline{z}]$: Ein Punkt $[\overline{y} + \mu\overline{z}]$ ($\mu \in \mathbb{C}$) wird vom Punkt $[y + \overline{\mu}z]$ unter g getroffen. Außerdem wird jeder Punkt $[y + \lambda z] \in \mathbb{P}(U)$ von g auf $[\overline{y} + \overline{\lambda}\overline{z}]$ abgebildet.
Da g selbstinvers ist, folgt $g(g(\mathbb{P}(U))) = \mathbb{P}(U)$. Folglich bildet g die Geraden bijektiv auf die Geraden ab und ist somit eine Kollineation.
Angenommen g ist projektiv. Da jeder Punkt des kanonischen Rahmens

$$\big([1:0:0], [0:1:0], [0:0:1], [1:1:1]\big)$$

ein Fixpunkt von g ist, muss g nach Satz 3.8 gleich der Identität sein, da diese projektiv ist und ebenfalls jeden Punkt des Rahmens fest lässt. Dies ist jedoch ein Widerspruch, weil $g\big([1 : i : 0]\big) = [1 : -i : 0] \neq [1 : i : 0]$ gilt. Somit ist g eine Kollineation, die nicht projektiv ist.

In diesem Beispiel ist die komplexe Konjugation - ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ - „störend“ hinsichtlich der Projektivität von g. Trotzdem ist g eine Kollineation. Wir benötigen also ein Konzept, das Körperautomorphismen von K mit einbezieht. Den „richtigen“ Begriff liefern die so genannten semilinearen Abbildungen.

Definition 3.11: Eine Abbildung $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ heißt **semilinear** mit begleitendem Körperautomorphismus $\varrho : K \to K$, falls für alle $v, w \in \mathcal{V}$ und alle $c \in K$ gilt, dass $f(v + w) = f(v) + f(w)$ und $f(cv) = \varrho(c)f(v)$ ist.

Eine semilineare Abbildung ist demnach genau dann linear, wenn der begleitende Körperautomorphismus die Identität ist. Zudem induziert jede bijektive, semilineare Abbildung $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine Kollineation auf $\mathbb{P}(\mathcal{V})$.

Satz 3.12 ([2, S. 122, Satz 3.5.8])**:** *Sei $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine bijektive, semilineare Abbildung. Dann induziert f eine Kollineation $g : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$, $[v] \mapsto [f(v)]$.*

Ist $\dim \mathbb{P}(\mathcal{V}) \geqslant 2$, dann wird sogar jede Kollineation auf $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ durch eine bijektive, semilineare Abbildung induziert. Dieses zentrale Resultat wird häufig (auch in [7]) als Fundamentalsatz der projektiven Geometrie bezeichnet. In [2, S. 122, Satz 3.5.9] ist er als „Zweiter Struktursatz für projektive Räume“ aufgeführt.

Theorem 3.13: Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie
Sei $\dim \mathbb{P}(\mathcal{V}) \geqslant 2$. *Dann gibt es zu jeder Kollineation* $g : \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$ *eine semilineare, bijektive Abbildung* $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *die* g *induziert.*

Da es sich um den zentralen geometrischen Schritt im Beweis für $n \geqslant 3$ handelt, wird dieses Theorem bewiesen. Der hier vorgestellte Beweis ist klassisch und kommt ohne größere Vorkenntnisse aus. Er wurde komplett aus [1, S. 88-90] entnommen.

Beweis von Theorem 3.13. Seien $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ projektive Unterräume von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$, etwa $\mathcal{X}_i = \mathbb{P}(\mathcal{U}_i)$. Es sei daran erinnert, dass der kleinste projektive Unterraum, der die $\mathcal{X}_i$ enthält, mit $[\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k]$ bezeichnet wird und, dass $[\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k] = \mathbb{P}(\mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_k)$ gilt (Definition 3.2). Interessanterweise ist es im Beweis hilfreich, ständig in $\mathcal{V}$ zu arbeiten statt in $\mathbb{P}(\mathcal{V})$. Sind die $\mathcal{U}_i$ und $\mathcal{U}$ Geraden von $\mathcal{V}$ bzw. Punkte von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ so ist $\mathcal{X}_i = \{\mathcal{U}_i\}$ und als Schreibvereinfachung lassen wir die geschweiften Klammern im Folgenden aus. Nun ist $\mathcal{U} \in [\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k] = \mathbb{P}(\mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_k)$ in $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ äquivalent zu $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_k$ in $\mathcal{V}$.
Der Beweis wird wie in [1] in zehn Schritten geführt. Es sind $\mathcal{U} = \langle u \rangle$ und $\mathcal{U}_i = \langle u_i \rangle$ stets Geraden von $\mathcal{V}$ - insbesondere sind $u, u_i \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$. Besonders die Konstruktion und der Nachweis des Körperautomorphismus der semilinearen Abbildung f erfordert viel Aufwand. Die ersten drei Schritte dienen der Vorbereitung.

1) Da g eine Kollineation ist, folgt aus $\mathcal{U} \in \big[\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\big]$ (das heißt $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, U_2$ sind kollinear), dass $g(\mathcal{U}) \in \big[g(\mathcal{U}_1), g(\mathcal{U}_2)\big]$. Äquivalent folgt aus $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$, dass $g(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U}_1) + g(\mathcal{U}_2)$ gilt. Diese Eigenschaft kann induktiv erweitert werden zu

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_r \ \text{ impliziert } \ g(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U}_1) + \ldots + g(\mathcal{U}_r).$$

Der Beweis läuft per Induktion nach $r \in \mathbb{N}$, wobei $r = 1$ klar ist. Sei also $r \geqslant 2$ beliebig, fest und die Behauptung gelte für $r - 1$.
Ist $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ so ist nichts zu zeigen. Für $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_r$ gibt es Vektoren $v \in \mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_{r-1}$, $v \neq 0$ und $w \in \mathcal{U}_r$ mit $\mathcal{U} = \langle v + w \rangle$. Da g eine Kollineation ist, folgt aus $\mathcal{U} \subseteq \langle v \rangle + \mathcal{U}_r$, dass $g(\mathcal{U}) \subseteq g(\langle v \rangle) + g(\mathcal{U}_r)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $g(\langle v \rangle) \subseteq g(\mathcal{U}_1) + \ldots + g(\mathcal{U}_{r-1})$ und damit erhalten wir $g(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U}_1) + \ldots + g(\mathcal{U}_r)$.

2) Die folgende Argumentation werden wir des Öfteren benötigen. Seien $v, w \in \mathcal{V}$ linear unabhängig und $\mathcal{U} \subseteq \langle v \rangle + \langle w \rangle$. Dann gibt es eindeutige $a, b \in K$ mit $u = av + bw$. Ist $\mathcal{U} \neq \langle w \rangle$, so folgt zwangsläufig $a \neq 0$. Nach Normierung kann u durch $v + (a^{-1}b)w =: v + \lambda w$ ersetzt werden. Somit ist $\mathcal{U} = \langle v + \lambda w \rangle$, wobei λ eindeutig(!) bestimmt ist.

3) Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und sei $\mathcal{U}_i := \langle u_i \rangle$. Nach Voraussetzung ist $\dim \mathcal{V} = n \geqslant 3$. Weiter sei $w_i \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$ mit $g(\mathcal{U}_i) = \langle w_i \rangle$. Da $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist, gilt $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_n$. Sei nun $\mathcal{W}$ eine beliebige Gerade von $\mathcal{V}$. Dann gibt es nach der Surjektivität von g eine Gerade $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$ mit $g(\mathcal{U}) = \mathcal{W}$. Aus $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 + \ldots + \mathcal{U}_n$ folgt mit 1)

$$\mathcal{W} = g(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U}_1) + \ldots + g(\mathcal{U}_n) = \langle w_1 \rangle + \ldots + \langle w_n \rangle = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle.$$

Jeder Vektor von $\mathcal{V}$ liegt auf einer Geraden $\mathcal{W}$ und damit ist $\mathcal{V} = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ gezeigt. Wegen $\dim \mathcal{V} = n$ ist $w_1, \ldots, w_n$ sogar eine Basis von $\mathcal{V}$. Da $u_1, \ldots, u_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ Basen von $\mathcal{V}$ sind, ergibt nur die triviale Linearkombination der u_i bzw. der w_i den Nullvektor. Alle anderen Vektoren spannen somit Geraden von $\mathcal{V}$ bzw. Punkte von $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ auf. (Dies wird nun sehr häufig implizit verwendet.)
So ist für $i \geqslant 2$ z. B. $u_1 + u_i \neq 0$ und $\langle u_1 + u_i \rangle \subseteq \langle u_1 \rangle + \langle u_i \rangle$. Aus der linearen Unabhängigkeit von u_1 und u_i folgt $\langle u_1 + u_i \rangle \neq \langle u_i \rangle$. Nach 1) ist $g\big(\langle u_1 + u_i \rangle\big) \subseteq \langle w_1 \rangle + \langle w_i \rangle$ und mit g injektiv folgt aus $\langle u_1 + u_i \rangle \neq \langle u_i \rangle$ auch $g\big(\langle u_1 + u_i \rangle\big) \neq \langle w_i \rangle$. Demnach existiert nach 2) ein eindeutiges $\lambda_i \in K$ mit $g\big(\langle u_1 + u_i \rangle\big) = \langle w_1 + \lambda w_i \rangle$. Aus $\langle u_1 + u_i \rangle \neq \langle u_1 \rangle$ folgt $g\big(\langle u_1 + u_i \rangle\big) \neq \langle w_1 \rangle$ und somit ist $\lambda_i \neq 0$.
Wir ersetzen nun w_i durch $\lambda_i w_i$, wobei die Eigenschaft $g(\mathcal{U}_i) = \langle w_i \rangle$ wegen $\lambda_i \neq 0$ erhalten bleibt. Folglich ist $w_1, \ldots, w_n$ nach wie vor eine Basis von $\mathcal{V}$. Nun gilt nach Konstruktion allerdings $g\big(\langle u_j \rangle\big) = \langle w_j \rangle$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ sowie

$$g\big(\langle u_1 + u_i \rangle\big) = \langle w_1 + w_i \rangle \;\text{ für alle }\; i \in \{2, \ldots, n\}. \tag{8}$$

Nun wird in 4) der Körperautomorphismus für die semilineare Abbildung f konstruiert.

4) Sei $x \in K$ beliebig. Dann ist $\langle u_1 + x u_2 \rangle \subseteq \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$ aber auch $\langle u_1 + x u_2 \rangle \neq \langle u_2 \rangle$. Wie in 3) folgt mit g injektiv und 2), dass es ein eindeutiges $\varrho(x) \in K$ gibt mit $g\big(\langle u_1 + x u_2 \rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(x) w_2 \rangle$. Damit erhalten wir eine Funktion $\varrho : K \to K$. Ist $x \neq y$ mit $y \in K$ so gilt $\langle u_1 + x u_2 \rangle \neq \langle u_1 + y u_2 \rangle$. Die Injektivität von g impliziert

$$\langle w_1 + \varrho(x) w_2 \rangle = g\big(\langle u_1 + x u_2 \rangle\big) \neq g\big(\langle u_1 + y u_2 \rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(y) w_2 \rangle.$$

Insbesondere ist $\varrho(x) \neq \varrho(y)$ und ϱ ist injektiv. Offensichtlich gilt $\varrho(0) = 0$ und wegen (8) gilt $\varrho(1) = 1$.
Sei nun $i \geqslant 3$ beliebig, fest. Ganz analog gibt es eine injektive Abbildung $\gamma : K \to K$, sodass $g\big(\langle u_1 + x u_i \rangle\big) = \langle w_1 + \gamma(x) w_i \rangle$ für alle $x \in K$ gilt. Natürlich ist $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$. Im Folgenden wird $\gamma = \varrho$ gezeigt. Da $\gamma(0) = 0 = \varrho(0)$ ist, genügt es $x \in K \backslash \{0\}$ zu betrachten. Es gilt $\langle x u_2 - x u_i \rangle \subseteq \langle u_2 \rangle + \langle u_i \rangle$ sowie $\langle x u_2 - x u_i \rangle \subseteq \langle u_1 + x u_2 \rangle + \langle u_1 + x u_i \rangle$. Sei $w \in \mathcal{V}$, sodass $\langle w \rangle = g\big(\langle x u_2 - x u_i \rangle\big)$ gilt. Dann ist $\langle w \rangle$ Teilmenge von $\langle w_2 \rangle + \langle w_i \rangle$ und von $\langle w_1 + \varrho(x) w_2 \rangle + \langle w_1 + \gamma(x) w_i \rangle$. Somit gibt es $a, b, c, d \in K$ mit

$$\begin{aligned} w = 0 w_1 + a w_2 + b w_i &= c(\, w_1 + \varrho(x) w_2 \,) + d(\, w_1 + \gamma(x) w_2 \,) \\ &= (c + d) w_1 + c \varrho(x) w_2 + d \gamma(x) w_i \,. \end{aligned}$$

Da $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist, hat w eindeutige Koordinaten bzgl. der w_i. Ein Koordinatenvergleich liefert $c + d = 0$ bzw. $d = -c$. Mit $w \neq 0$ ist auch $c \neq 0$ und es folgt $\langle w \rangle = \langle\, c(\, \varrho(x) w_2 - \gamma(x) w_i \,) \,\rangle = \langle \varrho(x) w_2 - \gamma(x) w_i \rangle$. Andererseits ist wegen $x \neq 0$ auch $\langle x u_2 - x u_i \rangle = \langle u_2 - u_i \rangle$ und eine analoge Argumentation wie eben liefert $\langle w \rangle = g\big(\langle u_2 - u_i \rangle\big) = \langle \varrho(1) w_2 - \gamma(1) w_i \rangle = \langle w_2 - w_i \rangle$. Zusammen ergibt sich

$$\langle \varrho(x) w_2 - \gamma(x) w_i \rangle = \langle w \rangle = \langle w_2 - w_i \rangle,$$

was nur möglich ist, wenn $\varrho(x) = \gamma(x)$ gilt. (Ein detaillierter Beweis wäre wieder über einen Koordinatenvergleich bzgl. der Basis $w_1, \ldots, w_n$.) Dies zeigt $\varrho = \gamma$. Insgesamt wurde bewiesen, dass es genau eine Abbildung $\varrho : K \to K$ mit

$$g\big(\langle u_1 + xu_i\rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(x)w_i\rangle \quad \text{für alle} \quad i \in \{2, \ldots, n\}$$

gibt. Zudem ist ϱ injektiv. Die Schritte 5 und 6 dienen nun zur Vorbereitung für die Nachweise der Surjektivität und der Homomorphie-Eigenschaft von ϱ.

5) Seien $x_2, \ldots, x_n \in K$ beliebig. Es wird

$$g\big(\langle u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_ru_r\rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_r)w_r\rangle$$

per Induktion nach $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant r \leqslant n$ gezeigt.
Für $r = 1$ gilt die Aussage nach Definition. Sei also $2 \leqslant r \leqslant n$ und die Behauptung gelte für $r - 1$.
Wir setzen $u := u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_ru_r$. Damit gilt $\langle u\rangle \subseteq \langle u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_{r-1}u_{r-1}\rangle + \langle u_r\rangle$ und $\langle u\rangle \neq \langle u_r\rangle$. Mit der bereits bekannten Argumentation aus 3) und unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung gibt es ein eindeutiges $c \in K$, sodass

$$g\big(\langle u\rangle\big) = \big\langle \big(w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_{r-1})w_{r-1}\big) + cw_r\big\rangle$$

gilt. Es verbleibt $c = \varrho(x_r)$ zu zeigen.
Außerdem gilt $\langle u\rangle \subseteq \langle u_1 + x_ru_r\rangle + \langle u_2\rangle + \ldots + \langle u_{r-1}\rangle$ und somit ist $g\big(\langle u\rangle\big)$ nach 1) eine Teilmenge von $\langle w_1 + \varrho(x_r)w_r\rangle + \langle w_2\rangle + \ldots + \langle w_{r-1}\rangle$. Folglich gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1} \in K$ mit

$$\begin{aligned} w :&= w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_{r-1})w_{r-1} + cw_r \\ &= \lambda_1\big(w_1 + \varrho(x_r)w_r\big) + \lambda_2w_2 + \ldots + \lambda_{r-1}w_{r-1} \\ &= \lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 + \ldots + \lambda_{r-1}w_{r-1} + \lambda_1\varrho(x_r)w_r\,. \end{aligned}$$

Ein Koordinatenvergleich bzgl. der Basis $w_1, \ldots, w_n$ liefert $\lambda_1 = 1$ und $\varrho(x_r) = c$. Dies beendet die Induktion. Insbesondere wurde

$$g\big(\langle u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n\rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\rangle$$

bewiesen.

6) Seien $x_2, \ldots, x_n \in K$ *nicht alle* gleich Null und $\langle w\rangle := g\big(\langle x_2u_2 + \ldots + x_nu_n\rangle\big)$. Nach 1) ist $\langle w\rangle \subseteq \langle w_2\rangle + \ldots + \langle w_n\rangle$ und $\langle w\rangle \subseteq \langle w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\rangle + \langle w_1\rangle$, weil die Gerade $\langle x_2u_2 + \ldots + x_nu_n\rangle$ in $\langle u_2\rangle + \ldots + \langle u_n\rangle$ und $\langle u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n\rangle + \langle u_1\rangle$ liegt.
Natürlich ist $\langle w\rangle \neq \langle w_1\rangle$ (g ist injektiv) und nach 2) gibt es ein eindeutiges $\lambda \in K$ mit $\langle w\rangle = \big\langle\big(w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\big) + \lambda w_1\big\rangle$. Wegen $\langle w\rangle \subseteq \langle w_2\rangle + \ldots + \langle w_n\rangle$ folgt $\lambda = -1$. Dies zeigt

$$g\big(\langle x_2u_2 + \ldots + x_nu_n\rangle\big) = \langle w\rangle = \langle\, \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\,\rangle.$$

Jetzt können wir die Surjektivität von ϱ nachweisen.

7) Sei $y \in K$ beliebig. Da g eine Kollineation ist, gibt es genau eine Gerade $\langle u\rangle$

von $\mathcal{V}$ mit $g(\langle u\rangle) = \langle w_1 + yw_2\rangle$. Zudem gibt es $x_1, \ldots, x_n \in K$ (nicht alle Null) mit $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$, weil $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist. Der sechste Schritt hat gezeigt, dass $x_1 \neq 0$ gelten muss. Nach eventueller Normierung von u mit x_1^{-1} können wir $x_1 = 1$ annehmen. Mit 5) folgt

$$\langle w_1 + yw_2\rangle = g\big(\langle u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n\rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\rangle\,.$$

Also existiert ein $\lambda \in K$ mit $w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_n)w_n = \lambda\big(w_1 + yw_2\big)$ und ein Koordinatenvergleich liefert $\lambda = 1$ und $\varrho(x_2) = y$. Damit ist ϱ surjektiv.

In 8) und 9) wird nachgewiesen, dass ϱ ein Körperhomomorphismus ist. Dabei ist die Voraussetzung $n \geqslant 3$ von entscheidender Bedeutung!

8) Seien $x, y \in K$ beliebig. 5) und $\varrho(0) = 0$ implizieren $g\big(\langle u_1 + (x+y)u_2 + u_3\rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(x+y)w_2 + w_3\rangle$. Aus $\langle u_1 + (x+y)u_2 + u_3\rangle \subseteq \langle u_1 + xu_2\rangle + \langle yu_2 + u_3\rangle$ folgt mit 1), 3) und 6) dass $\langle w_1 + \varrho(x+y)w_2 + w_3\rangle \subseteq \langle w_1 + \varrho(x)w_2\rangle + \langle \varrho(y)w_2 + w_3\rangle$. Demnach gibt es $c, d \in K$ mit

$$w_1 + \varrho(x+y)w_2 + w_3 = c\big(w_1 + \varrho(x)w_2\big) + d\big(\varrho(y)w_2 + w_3\big).$$

Der Koordinatenvergleich zeigt $c = d = 1$ und somit $\varrho(x+y) = \varrho(x) + \varrho(y)$.

9) Mit 5) folgt $g\big(\langle u_1 + (xy)u_2 + xu_3\rangle\big) = \langle w_1 + \varrho(xy)w_2 + \varrho(x)w_3\rangle$. Nun impliziert $\langle u_1 + (xy)u_2 + xu_3\rangle \subseteq \langle u_1\rangle + \langle yu_2 + u_3\rangle$ mit 6), dass $\langle w_1 + \varrho(xy)w_2 + \varrho(x)w_3\rangle \subseteq \langle w_1\rangle + \langle \varrho(y)w_2 + w_3\rangle$ gilt. Folglich existieren $c, d \in K$ mit

$$w_1 + \varrho(xy)w_2 + \varrho(x)w_3 = cw_1 + d\big(\varrho(y)w_2 + w_3\big) = cw_1 + \big(d\varrho(y)\big)w_2 + dw_3.$$

Es folgt $d = \varrho(x)$ und somit $\varrho(xy) = d\varrho(y) = \varrho(x)\varrho(y)$. Insgesamt wurde bewiesen, dass ϱ ein Automorphismus des Körpers K ist.

10) Wie eine lineare Abbildung $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ ist auch eine semilineare Abbildung $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ bzgl. ϱ eindeutig auf einer Basis von $\mathcal{V}$ gegeben. Sei $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ die eindeutige semilineare Abbildung bzgl. ϱ, welche $f(u_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ erfüllt. Da $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist, ist f sogar bijektiv. (Der Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für lineare Abbildungen kann unter Beachtung von ϱ auf semilineare Abbildungen bzgl. ϱ übertragen werden.)

Zuletzt zeigen wir, dass f auch g induziert. Sei $\langle u\rangle$ eine beliebige Gerade von $\mathcal{V}$ und sei $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ mit geeigneten $x_i \in K$ (nicht alle Null). Ist $x_1 = 0$ so folgt mit 6), dass

$$\begin{aligned} g\big(\langle u\rangle\big) &= \langle 0 \cdot w_1 + \varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\rangle = \langle \varrho(x_1)w_1 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\rangle \\ &= \langle \varrho(x_1)f(u_n) + \ldots + \varrho(x_n)f(u_n)\rangle = \big\langle f(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n)\big\rangle = \big\langle f(u)\big\rangle. \end{aligned}$$

Ist $x_1 \neq 0$ so gilt $\langle u\rangle = \langle u_1 + (x_1^{-1}x_2)u_2 + \ldots + (x_1^{-1}x_n)u_n\rangle$ und aus 5) folgt

$$\begin{aligned} g\big(\langle u\rangle\big) &= \langle w_1 + \varrho(x_1^{-1}x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_1^{-1}x_n)w_n\rangle \\ &= \langle w_1 + \varrho(x_1)^{-1}\varrho(x_2)w_2 + \ldots + \varrho(x_1)^{-1}\varrho(x_n)w_n\rangle \\ &= \langle \varrho(x_1)w_1 + \ldots + \varrho(x_n)w_n\rangle = \big\langle f(u)\big\rangle. \end{aligned}$$

Damit gilt stets $g\big(\langle u\rangle\big) = \big\langle f(u)\big\rangle$, das heißt g wird von f induziert. □

Gerüstet mit diesem Theorem können wir nun den Fall $n \geqslant 3$ von Theorem 2.13 in Angriff nehmen.

4 Dieudonnés Beweis für $n \geqslant 3$

Bevor wir Theorem 2.13 für $n \geqslant 3$ beweisen, benötigen wir noch ein Lemma.

Lemma 4.1: *Seien $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq k$ und $j \neq l$. Dann sind*

$$\{\lambda E_{i,j} \mid \lambda \in K\},\ \{\lambda(E_{i,j} + E_{i,l}) \mid \lambda \in K\},\ \{\lambda(E_{i,j} + E_{k,j}) \mid \lambda \in K\}$$

jeweils Schnitt eines Links- und eines Rechtsideals von $K^{n,n}$.

Beweis. Es gilt

$$\{\lambda E_{i,j} \mid \lambda \in K\} = \mathrm{Span}\{E_{1,j}, \ldots, E_{n,j}\} \cap \mathrm{Span}\{E_{i,1}, \ldots, E_{i,n}\},$$

wobei der Unterraum links vom Schnittsymbol ein Linksideal und der rechts davon ein Rechtsideal ist. Anschaulich enthält der Unterraum links alle Matrizen, deren Spalten - bis auf die j-te - alle Null sind. Der Unterraum rechts enthält alle Matrizen, deren Zeilen - bis auf die i-te - alle Null sind. Des Weiteren gilt

$$\{\lambda(E_{i,j} + E_{i,l}) \mid \lambda \in K\} = \mathrm{Span}\{E_{1,j} + E_{1,l}, \ldots, E_{n,j} + E_{n,l}\} \cap \mathrm{Span}\{E_{i,1}, \ldots, E_{i,n}\}$$

sowie

$$\{\lambda(E_{i,j} + E_{k,j}) \mid \lambda \in K\} = \mathrm{Span}\{E_{1,j}, \ldots, E_{n,j}\} \cap \mathrm{Span}\{E_{i,1} + E_{k,1}, \ldots, E_{i,n} + E_{k,n}\}.$$

Auch hier steht jeweils links vom Schnittsymbol ein Linksideal und rechts davon ein Rechtsideal. □

Wir kommen nun zum lange angekündigten Resultat von Dieudonné. Dieses werden wir jedoch nicht in seiner allgemeinsten Form (für bijektives, *semi*lineares f) formulieren und beweisen, sondern nur den hier benötigten linearen Fall behandeln. Der vorgestellte Beweis stammt (entsprechend modifiziert) aus [7, S. 286f.] und übernimmt Ideen von [23, S. 43, Theorem 4.5.3], wo ebenfalls nur der lineare Fall besprochen wird. Das folgende Theorem ist genau Theorem 2.13 für $n \geqslant 3$.

Theorem 4.2: Dieudonné in [7, S. 286, Théorème 3]
Sei $n \geqslant 3$ und sei $f : K^{n,n} \to K^{n,n}$ eine bijektive, lineare Abbildung, die $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ erfüllt. Dann hat f notwendigerweise eine der Formen

$$X \mapsto PXQ \quad \textit{oder} \quad X \mapsto PX^TQ$$

mit Matrizen $P, Q \in GL_n(K)$.

Beweis. Der Beweis wird zur übersichtlichen Darstellung in sechs Schritten präsentiert.

1) Nach Satz 2.42 bildet f die maximalen Ideale „gleichmäßig“ auf die maximalen Ideale ab und dies jeweils bijektiv. Falls f die maximalen Links- bzw. Rechtsideale auf die maximalen Links- bzw. Rechtsideale abbildet, so setzen wir $\varphi := f$. Bildet f die maximalen Links- auf die maximalen Rechtsideale und umgekehrt ab, so setzen wir $\varphi := \tau \circ f$.

Somit ist φ linear und bijektiv. Zudem bildet φ die maximalen Links- bzw. Rechtsideale bijektiv auf die maximalen Links- bzw. Rechtsideale ab. Im zweiten Schritt wird dies in Verbindung mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.3 verwendet, um zwei Kollineationen von $\mathbb{P}^{n-1}$ zu konstruieren.

2) Da φ die maximalen Linksideale bijektiv auf die maximalen Linksideale abbildet und diese 1:1 den Geraden von K^n entsprechen (Satz 2.24), induziert φ die Bijektion

$$\phi_1 : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1},\ \phi_1(\mathcal{W}) = V\big(\,\varphi(I(\mathcal{W}))\,\big).$$

Hierbei ist $\mathcal{W}$ eine Gerade von K^n bzw. ein Punkt von $\mathbb{P}^{n-1}$. Mit anderen Worten charakterisiert ϕ_1 die Bijektion zwischen maximalen Linksidealen, die von φ induziert wird, bzw. es gilt (Anwenden von I)

$$\varphi\big(I(\mathcal{W})\big) = I\big(\phi_1(\mathcal{W})\big) \text{ für alle Geraden } \mathcal{W} \text{ von } K^n.$$

Weiter ist ϕ_1 sogar eine Kollineation. Seien dazu a, b, c kollineare Punkte von $\mathbb{P}^{n-1}$ bzw. koplanare Geraden von K^n. Dann ist $\dim(a+b+c) = 2$ und es folgt $\dim I(a+b+c) = n(n-2)$ mit Satz 2.24. Da $\varphi \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ gilt, folgt $n(n-2) = \dim \varphi(I(a+b+c))$. Demnach gilt (erneut mit Satz 2.24) $\dim V\big(\,\varphi(I(a+b+c))\,\big) = 2$. Proposition 2.23 und Korollar 2.27 liefern folgende Rechnung in K^n

$$\begin{aligned} V\big(\varphi(I(a+b+c))\big) &= V\big(\,\varphi\big(I(a) \cap I(b) \cap I(c)\big)\,\big) = V\big(\varphi(I(a)) \cap \varphi(I(b)) \cap \varphi(I(c))\big) \\ &= V\big(\,\varphi(I(a))\,\big) + V\big(\,\varphi(I(b))\,\big) + V\big(\,\varphi(I(c))\,\big) \\ &= \phi_1(a) + \phi_1(b) + \phi_1(c). \end{aligned}$$

Dies zeigt mit $\dim V\big(\,\varphi(I(a+b+c))\,\big) = 2$, dass $\phi_1(a)$, $\phi_1(b)$ und $\phi_1(c)$ koplanare Geraden des K^n bzw. kollineare Punkte des $\mathbb{P}^{n-1}$ sind. Dies beendet den Nachweis der Kollinearität von ϕ_1.
Ganz analog kann man zeigen, dass

$$\phi_2 : \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1},\ \phi_2(\mathcal{W}) = V\big(\,\varphi(I(\mathcal{W})^T)^T\,\big)$$

eine Kollineation ist. Die Konstruktion von ϕ_2 nutzt die 1:1 Korrespondenz der maximalen Rechtsideale zu den Geraden von K^n - vgl. Bemerkung 2.26.
Da $n-1 \geqslant 2$ ist, gibt es nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (Theorem 3.13) bijektive, semilineare Abbildungen $\nu_1, \nu_2 : K^n \to K^n$, die ϕ_1 bzw. ϕ_2 induzieren. Insbesondere gilt

$$\nu_1(\mathcal{W}) = V\big(\,\varphi(I(\mathcal{W}))\,\big) \text{ und } \nu_2(\mathcal{W}) = V\big(\,\varphi(I(\mathcal{W})^T)^T\,\big)$$

für alle Geraden $\mathcal{W}$ von K^n.

3) Mittels der Linearität von φ können wir zeigen, dass ν_1 und ν_2 sogar linear sind. (Dieser Schritt wird in dem sehr skizzenhaften Beweis von [23, S. 43] erwähnt.) Erneut wird dies beispielhaft für ν_1 bewiesen, und kann analog (unter Beachtung der Transposition) für ν_2 gefolgert werden.
Die folgende Argumentation werden wir häufiger verwenden. Seien $A \in K^{n,n}$ und $x \in K^n \backslash \{0\}$ mit $Ax = 0$. Dann ist $\langle x \rangle \subseteq \mathrm{Kern}(A)$ und damit ist A im maximalen

Linksideal $\mathcal{I} := I(\langle x \rangle)$ enthalten. Nach Definition von ν_1 gilt $\nu_1(x) \in V\big(\varphi(\mathcal{I})\big)$ und aus $\varphi(A) \in \varphi(\mathcal{I})$ folgt $\varphi(A) \cdot \nu_1(x) = 0$. Kurz: Aus $Ax = 0$ folgt $\varphi(A) \cdot \nu_1(x) = 0$.
Da $n \geqslant 3$ gilt, können wir die kanonischen Matrizen $E_{1,1}$ und $E_{1,2}$ betrachten. Sei $w_i := \nu_1(e_i)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann sind die w_i linear unabhängig, weil die e_i linear unabhängig sind und ν_1 semilinear und injektiv ist. Für alle $j \in \{2, \dots, n\}$ gilt $E_{1,1}e_j = 0$ und es folgt $\varphi(E_{1,1})w_j = 0$. Dies zeigt $\langle w_2, \dots, w_n \rangle \subseteq \operatorname{Kern}\big(\varphi(E_{1,1})\big)$. Da die w_i linear unabhängig sind, hat $\varphi(E_{1,1})$ höchstens den Rang 1. Allerdings ist $\varphi(E_{1,1}) \neq 0$, weil φ bijektiv ist. Somit hat $\varphi(E_{1,1})$ genau Rang 1 und damit gilt $\langle w_2, \dots, w_n \rangle = \operatorname{Kern}\big(\varphi(E_{1,1})\big)$. Demnach ist $\varphi(E_{1,1})w_1 \neq 0$.
Des Weiteren ist $E_{1,2}e_1 = 0$, also gilt $\varphi(E_{1,2})w_1 = 0$. Zudem gilt

$$(E_{1,1} - E_{1,2}) \cdot (e_1 + e_2) = E_{1,1}e_1 + E_{1,1}e_2 - E_{1,2}e_1 - E_{1,2}e_2 = e_1 + 0 - 0 - e_1 = 0.$$

Daraus folgt mit $\varphi(E_{1,1})w_2 = 0$ und $\varphi(E_{1,2})w_1 = 0$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(E_{1,1} - E_{1,2}) \cdot \nu_1(e_1 + e_2) = \big(\varphi(E_{1,1}) - \varphi(E_{1,2})\big) \cdot \big(\nu_1(e_1) + \nu_1(e_2)\big) \\ &= \varphi(E_{1,1})w_1 + \varphi(E_{1,1})w_2 - \varphi(E_{1,2})w_1 - \varphi(E_{1,2})w_2 = \varphi(E_{1,1})w_1 - \varphi(E_{1,2})w_2. \end{aligned}$$

Somit ist $\varphi(E_{1,1})w_1 = \varphi(E_{1,2})w_2$. $(*)$
Damit können wir nun zeigen, dass der zu ν_1 gehörige Körperautomorphismus ϱ die Identität ist. Natürlich gilt $\varrho(0) = 0$. Sei also $\lambda \in K\backslash\{0\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda^{-1}E_{1,1} - E_{1,2}) \cdot (\lambda e_1 + e_2) &= (\lambda^{-1}\lambda)E_{1,1}e_1 + \lambda^{-1}E_{1,1}e_2 - \lambda E_{1,2}e_1 - E_{1,2}e_2 \\ &= e_1 + 0 - 0 - e_1 = 0 \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\lambda^{-1}E_{1,1} - E_{1,2}) \cdot \nu_1(\lambda e_1 + e_2) = \big(\lambda^{-1}\varphi(E_{1,1}) - \varphi(E_{1,2})\big) \cdot \big(\varrho(\lambda)\nu_1(e_1) + \nu_1(e_2)\big) \\ &= \big(\lambda^{-1}\varrho(\lambda)\big)\varphi(E_{1,1})w_1 + \lambda^{-1}\varphi(E_{1,1})w_2 - \varrho(\lambda)\varphi(E_{1,2})w_1 - \varphi(E_{1,2})w_2 \\ &= \big(\lambda^{-1}\varrho(\lambda)\big)\varphi(E_{1,1})w_1 - \varphi(E_{1,2})w_2. \end{aligned}$$

Dies zeigt $\big(\lambda^{-1}\varrho(\lambda)\big)\varphi(E_{1,1})w_1 = \varphi(E_{1,2})w_2$ und zusammen mit $(*)$ folgt

$$\big(\lambda^{-1}\varrho(\lambda)\big) \cdot \varphi(E_{1,1})w_1 = 1 \cdot \varphi(E_{1,1})w_1.$$

Wie oben gezeigt gilt $\varphi(E_{1,1})w_1 \in K^n\backslash\{0\}$ und damit folgt zwangsläufig $\lambda^{-1}\varrho(\lambda) = 1$ bzw. $\varrho(\lambda) = \lambda$. Das bedeutet $\varrho = \mathrm{id}_K$.
Insgesamt ist ν_1 (und analog ν_2) eine bijektive, lineare Abbildung.

4) Seien $A, B \in GL_n(K)$ die darstellenden Matrizen von ν_2 und ν_1, das heißt für alle $x \in K^n$ gilt $\nu_2(x) = Ax$ und $\nu_1(x) = Bx$. Nun definieren wir

$$\psi : K^{n,n} \to K^{n,n},\ X \mapsto A^T\varphi(X)B.$$

Aus $A, B \in GL_n(K)$ und $\varphi \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ folgt $\psi \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Abbildung ψ jedes maximale Ideal $\mathcal{J}$ von $K^{n,n}$ invariant lässt. Das heißt es gilt $\psi(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$. Es genügt $\psi(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}$ zu zeigen, da $\psi \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ und somit $\dim \psi(\mathcal{J}) = \dim \mathcal{J}$ gilt.

Zunächst sei $\mathcal{L}$ ein maximales Linksideal von $K^{n,n}$, $\mathcal{W} := V(\mathcal{L})$ und $X \in \mathcal{L} = I(\mathcal{W})$. Aus $\nu_1(\mathcal{W}) = V\big(\varphi(I(\mathcal{W}))\big)$ und $\varphi(X) \in \varphi(I(\mathcal{W}))$ folgt, dass

$$\psi(X)w = A^T\varphi(X)Bw = A^T\big(\varphi(X)\nu_1(w)\big) = A^T \cdot 0 = 0$$

für alle $w \in \mathcal{W}$ gilt. Somit gilt $\psi(X) \in I(\mathcal{W}) = \mathcal{L}$. Damit ist $\psi(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}$ bewiesen.
Sei nun $\mathcal{R}$ ein maximales Rechtsideal von $K^{n,n}$, $\mathcal{U} := V(\mathcal{R}^T)$ und $X \in \mathcal{R} = I(\mathcal{U})^T$. Mit $\nu_2(\mathcal{U}) = V\big(\,\varphi(I(\mathcal{U})^T)^T\,\big)$ und $\varphi(X)^T \in \varphi(I(\mathcal{U})^T)^T$ folgt

$$\psi(X)^T u = B^T\varphi(X)^T Au = B^T\big(\varphi(X)^T\nu_2(u)\big) = B^T \cdot 0 = 0$$

für alle $u \in \mathcal{U}$. Damit gilt $\psi(X)^T \in I(\mathcal{U}) = I(V(\mathcal{R}^T)) = \mathcal{R}^T$ bzw. $\psi(X) \in \mathcal{R}$. Dies zeigt $\psi(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.
Insgesamt wurde bewiesen, dass $\psi(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ für jedes maximale Ideal $\mathcal{J}$ von $K^{n,n}$ gilt. Mittels dieser Eigenschaft können wir im fünften Schritt folgern, dass ψ ein Vielfaches der Identität ist.

5) Da nach Korollar 2.25 jedes Linksideal Schnitt maximaler Linksideale ist und ψ zudem bijektiv ist, lässt ψ auch alle Linksideale invariant. Analog ist jedes Rechtsideal Schnitt maximaler Rechtsideale (Bemerkung 2.26), also lässt ψ auch alle Rechtsideale invariant.
Seien $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Für $i \neq k$ und $j \neq l$ sind die Mengen

$$\{\lambda E_{i,j} \mid \lambda \in K\},\ \{\lambda(E_{i,j} + E_{i,l}) \mid \lambda \in K\},\ \{\lambda(E_{i,j} + E_{k,j}) \mid \lambda \in K\}$$

nach Lemma 4.1 jeweils Schnitt eines Links- und eines Rechtsideals. Folglich werden auch sie von ψ invariant gelassen. Insbesondere gibt es für jedes Tupel (i,j) ein $\mu_{i,j} \in K$ mit $\psi(E_{i,j}) = \mu_{i,j}E_{i,j}$. Des Weiteren gibt es für $j \neq l$ stets ein $c_{ijl} \in K$ mit $\psi(E_{i,j} + E_{i,l}) = c_{ijl}(E_{i,j} + E_{i,l})$. Damit erhalten wir

$$c_{ijl}E_{i,j} + c_{ijl}E_{i,l} = \psi(E_{i,j} + E_{i,l}) = \psi(E_{i,j}) + \psi(E_{i,l}) = \mu_{i,j}E_{i,j} + \mu_{i,l}E_{i,l}\,.$$

Koeffizientenvergleich der Matrix ganz links und der ganz rechts in dieser Gleichung liefert $\mu_{i,j} = c_{ijl} = \mu_{i,l}$ für $j \neq l$. Analog wird $\mu_{i,j} = \mu_{k,j}$ für $i \neq k$ gezeigt.
Somit gilt für $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ stets $\mu_{i,j} = \mu_{i,l} = \mu_{k,l}$, also sind alle $\mu_{i,j}$ gleich einem $\mu \in K$. Folglich gilt $\psi(E_{i,j}) = \mu E_{i,j} = \mu \cdot \mathrm{id}_{K^{n,n}}(E_{i,j})$ für alle i, j. Da die linearen Abbildungen ψ und $\mu \cdot \mathrm{id}_{K^{n,n}}$ auf einer Basis von $K^{n,n}$ überein stimmen, sind sie gleich: $\psi = \mu \cdot \mathrm{id}_{K^{n,n}}$. Aus $\psi \in \mathrm{GL}(K^{n,n})$ folgt $\mu \in K\backslash\{0\}$.

6) Wurde $\varphi = f$ in 1) gewählt, so gilt

$$\mu X = \psi(X) = A^T\varphi(X)B = A^T f(X)B \quad\Leftrightarrow\quad f(X) = (\mu A^{-T})XB^{-1}$$

für alle $X \in K^{n,n}$. Die Behauptung folgt mit den invertierbaren Matrizen $P = \mu A^{-T}$ (μ ist invertierbar) und $Q = B^{-1}$.
Falls $\varphi = \tau \circ f$ in 1) gewählt wurde, gilt

$$\mu X = \psi(X) = A^T\varphi(X)B = A^T f(X)^T B \quad\Leftrightarrow\quad f(X) = (\mu B^{-T})X^T A^{-1}$$

für alle $X \in K^{n,n}$. Die Behauptung folgt mit $P = \mu B^{-T}$ und $Q = A^{-1}$. $\square$

5 Abschließende Bemerkungen

5.1 Wertung der Resultate und Statement zur Literatur

In dieser Arbeit wurden der Stabilisator der Determinante (Theorem 2.14) und der Stabilisator von Σ_n (Theorem 2.13) bestimmt. Dabei wurden die Beweise in sehr großer Allgemeinheit geführt, ganz streng genommen jedoch nur für $|K| \geqslant 2(n-1)$. Sie wurden also nicht für alle endlichen Körper nachvollzogen. Stattdesssen wurde mittels dieser Voraussetzung sogar eine Verallgemeinerung (Satz 2.31) zu Dieudonnés Charakterisierung der singulären Räume maximaler Dimension erreicht. Diese Verallgemeinerung gibt deutlich mehr Aufschluss über die Beschaffenheit vieler linearer Teilräume von Σ_n und ihrer (maximalen) Dimension. Damit wurde meines Erachtens dem Vorhaben, lineare Teilräume von Σ_n besser zu verstehen, Rechnung getragen. Zudem wurde eine - aus meiner Sicht - elegante und natürliche Charakterisierung aller Links- und Rechtsideale von $K^{n,n}$ durch Satz 2.21 und Korollar 2.22 gegeben. Insgesamt wurde also eine ganze Bandbreite an Resultaten, die in gewissen Zusammenhängen stehen, erzielt.
Bei der Beweisführung sollte deutlich geworden sein, dass die geometrischen Ideen (maximal lineare Teilräume, Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, Segre-Einbettung) von herausragender Bedeutung und die entscheidenden Grundideen der jeweiligen Beweise waren. Sie wurden deshalb ins zentrale Interesse dieser Arbeit gerückt. Besonders im Fall $n = 2$, der auch visuell erfassbar ist (z. B. für $K = \mathbb{R}$), kann man die Ideen sehr gut anschauen und die geometrische Struktur von Σ_2 gut erfassen. Doch benötigt man all diese komplizierten Ideen zum Beweis der Theoreme 2.13 und 2.14 wirklich?

Zwar ist der hier gewählte Zugang schön, jedoch auch sehr aufwändig. Man mag sich deshalb die Frage stellen: „Geht es nicht einfacher?“ Diese Frage kann meines Erachtens nicht hinreichend geklärt werden, verdient jedoch eine kurze Diskussion. Erst einmal finde ich es nicht überraschend, dass die Geometrie eine entscheidende Rolle spielt und möglicherweise sogar spielen muss. Die Bedingung $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ ist nämlich eine algebraisch-geometrische an die lineare Abbildung f, da Σ_n eine Hyperfläche aus Sicht der Algebraischen Geometrie ist. Noch deutlicher ist dies beim Stabilisator der Determinante, da entsprechende lineare Abbildungen sogar jede algebraische Menge $\{A \in K^{n,n} \mid \det(A) = \lambda\}$ mit festem $\lambda \in K$ erhalten. Somit finde ich es eher erstaunlich und interessant, dass die hier geführten Beweise mit (im Vergleich zur Algebraischen Geometrie „elementaren“) Mitteln der Linearen Algebra und projektiven Geometrie auskommen, wo doch die Formulierung der Probleme zur Verwendung mächtiger Hilfsmittel der Algebraischen Geometrie verleitet.
Tatsächlich gibt es für den Stabilisator der Determinante die bereits erwähnten, „einfacheren“ Beweise aus [20] und [22]. Allerdings bestimmen sie (vorher) nicht den Stabilisator von Σ_n und der zugrunde liegende Körper ist $\mathbb{C}$ bzw. algebraisch abgeschlossen und von Charakteristik 0. Das sind gleich zwei mögliche Gründe für die Schwierigkeit des hier gewählten Zugangs. Erstens ist die Bedingung $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ schwächer als die zu rangerhaltenden linearen Abbildungen, welche zuerst in [20] untersucht werden. Zweitens, und dies ist denke ich von entscheidender Relevanz, wurden in dieser Arbeit fast keine Voraussetzungen an den Grundkörper gestellt.

Im Allgemeinen ist es jedoch hilfreich und vereinfachend, wenn man (besonders falls Polynome eine gewisse Rolle spielen) Geometrie über unendlichen Körpern betreibt. Das liegt an dem Fakt, dass Polynome über unendlichen Körpern bijektiv den induzierten Polynomfunktionen entsprechen. Über endlichen Körpern ist dies jedoch *nie* der Fall. Auch in dieser Arbeit wurde in Abschnitt 2.4 in diesem Zusammenhang eine gewisse Größe des Körpers K benötigt. Zum Beispiel konnte damit argumentiert werden, dass ein Polynom das Nullpolynom sein muss. Verstärkt man die Voraussetzung noch weiter, indem man K als algebraisch abgeschlossen annimmt, so kann man auf eine Vielzahl weiterer mächtiger Konzepte zurück greifen. Zuletzt ist auch die Geometrie in Charakteristik 0 ab und zu einfacher zu erfassen, als die in Charakteristik p. Zusammenfassend bin ich der Ansicht, dass die weniger starken Voraussetzungen in dieser Arbeit (besonders die bzgl. K) eine Lösung deutlich komplizierter gestalten.

Doch die von Dieudonné erzielte Allgemeinheit ist sicherlich auch eine große Stärke. Seine Bestimmung des Stabilisators von Σ_n für alle Körper ist ein sehr starkes Theorem, das genutzt werden kann um andere Linear Preserver Problems deutlich einfacher zu lösen. Wann immer man Abbildungen aus $\mathrm{GL}(K^{n,n})$ mit bestimmten Eigenschaften charakterisieren möchte, welche $f(\Sigma_n) \subseteq \Sigma_n$ implizieren, kann man dies vermutlich sehr einfach mittels dieses Theorems erreichen. Dazu sei noch einmal an Bemerkung 2.12 erinnert, wonach $f(\Sigma_n) \subseteq \Sigma_n$ hinreichend für $f(\Sigma_n) = \Sigma_n$ ist. Eine Vereinfachung haben wir in dieser Arbeit beim Stabilisator der Determinante gesehen und offensichtlich sind z. B. auch alle rangerhaltenden Abbildungen aus $\mathrm{GL}(K^{n,n})$ unmittelbar charakterisiert.
Allerdings fand ich [7] auch schwer zu verstehen im Vergleich zu den anderen wissenschaftlichen Arbeiten, mit denen ich mich beschäftigt habe. Das liegt zum einen daran, dass Dieudonnés Beweis anspruchsvoll ist. Leider ist aber auch seine extrem kurze Präsentation dafür verantwortlich. Aus meiner Sicht ist diese - selbst für einen wissenschaftlichen Artikel - in bestimmten Phasen zu kurz. Einige zusätzliche Erklärungen z. B. zu maximalen Idealen von $K^{n,n}$ in oder vor dem Beweis zu [7, S. 286, Théorème 3] würden vermutlich eine deutliche Verbesserung des Verständnisses zur Folge haben. Diese recht großen Hürden zu einem guten Verständnis waren auch ein Grund, warum ich mich in Abschnitt 2.4 für den Zugang von [9] entschieden habe. Die Arbeit von Fillmore et. al. ist meistens sehr verständlich gehalten. Sie ist meines Erachtens eine gute, empfehlenswerte Einführung zu singulären Vektorräumen.
Trotz der Schwierigkeiten denke ich, ist die enorme Bedeutung von [7] besonders im Bereich der Linear Preserver Problems (LPP) unbestritten. Diese resultiert nicht nur aus der oben angesprochenen, großen Allgemeinheit und dass sich andere LPPs unmittelbar als Korollare ergeben. Dieudonné hat mit seinen Ideen auch andere MathematikerInnen inspiriert. Die Betrachtung maximal linearer Teilräume oder Teilräume maximaler Dimension wurde mehrmals zur Charakterisierung anderer LPPs angewandt. Die Arbeiten [4] und [24] verwenden die erlangten Ergebnisse zu den linearen Teilräumen sogar dazu, analog zu Dieudonné, die Charakterisierung mittels des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie abzuschließen. Die von Dieudonné eingeführten Methoden haben also vielfach Anwendung im Bereich der LPPs gefunden.

5.2 Ausblick

Natürlich könnte man sich weitergehend noch mit [7, S. 283-286] beschäftigen, um zu verstehen, warum die Voraussetzung $|K| \geqslant 2(n-1)$ in Satz 2.36 fallen gelassen werden kann. Andererseits erfuhren die Resultate von Dieudonné zumindest zur Charakterisierung des Stabilisators der Determinante zahlreiche ***Verallgemeinerungen***, sodass man gleich solch eine in Angriff nehmen könnte. So gelang es James [15] Resultate für kommutative Integritätsbereiche zu erzielen (1980). Während McDonald drei Jahre später zu Dieudonné analoge Ergebnisse für allgemeine kommutative Ringe in [21] zeigte. Waterhouse bewies in [27] die Resultate von McDonald auf anderem Wege, nämlich mit Mitteln der (modernen) algebraischen Geometrie. Eine der aktuellsten Arbeiten zu diesem Thema ist [13] von Guterman, in der Ergebnisse für nichtkommutative, lokale Ringe bewiesen werden. Aus der zugehörigen Zusammenfassung von Chong Guang Cao [5] auf MathSciNet stammt auch diese Schilderung der historischen Entwicklung.

Es gibt somit weiterführende Literatur, mit der man sich beschäftigen kann. Besonders hervorheben möchte ich den Zugang von Waterhouse in [27]. In diesem Artikel betrachtet Waterhouse auch mehrere ***Spezialfälle*** von Matrizenräumen. So charakterisiert er den Stabilisator der Determinante für symmetrische Matrizen in [27, S. 196, Theorem 6.7]. Zudem beschäftigt er sich in [27, Kapitel 5] mit Pfaffschen Idealen und erzielt Ergebnisse für die schiefsymmetrischen Matrizen im interessanten Fall n gerade. Sein Zugang mittels Gruppenschemata zu diesem Thema scheint sehr natürlich und geeignet zu sein. Ein anderes interessantes Resultat für hermitesche Matrizen im Fall $K = \mathbb{C}$ beweisen Marcus und Moyls in [20, S. 66, Theorem 5]: Eine Abbildung $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n,n})$ lässt die Determinante genau dann invariant, wenn sie die Determinante für hermitesche Matrizen invariant lässt.

Aus der Sicht der geometrischen Komplexitätstheorie nimmt auch die ***Permanente*** eine sehr wichtige Rolle ein. Die Bestimmung des Stabilisators der Permanente findet sich z. B. in [3] und [19]. Natürlich handelt es sich hier wieder um eine Fragestellung aus dem Bereich der ***Linear Preserver Problems***. An dieser Stelle sei noch einmal auf dieses interessante, umfangreiche und ausfürlich untersuchte Gebiet verwiesen. Eine kurze Einführung liefert z. B. [17] und eine sehr detaillierte und exzellente Übersicht ist in [23] zu finden.

Wie bereits erwähnt ist die Charakterisierung aller ***maximal singulären Räume*** meines Wissens noch nicht abgeschlossen. Für $n = 2$ sind die maximal singulären Räume genau die singulären Räume maximaler Dimension. Dies kann man gut in Abschnitt 3.2 an Hand von $\Sigma_2^{\mathbb{P}}$ erkennen. Interessante Aussagen zu maximal singulären Räumen finden sich in [9, S. 261-265]. Unter anderem wird (bis auf die eingeführte Äquivalenz) in [9, S. 265] eine vollständige Charakterisierung für $n = 3$ und für K *algebraisch abgeschlossen und* $n = 4$ gegeben. Dort werden jedoch keine Beweise gezeigt. Insgesamt handelt es sich vermutlich um eine Problemstellung, die noch umfangreicher Forschung bedarf.

Literaturverzeichnis

[1] Artin, E.: *Geometric algebra.* Wiley Classics Library. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988. Abdruck des Originals von 1957.

[2] Beutelspacher, A. und U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie. Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen.* Wiesbaden: Vieweg, 2. Auflage, 2004.

[3] Botta, P.: *Linear transformations that preserve the permanent.* Proc. Amer. Math. Soc., 18:566–569, 1967.

[4] Botta, P., S. Pierce und W. Watkins: *Linear transformations that preserve the nilpotent matrices.* Pacific J. Math., 104:39–46, 1983.

[5] Cao, C. G. `http://www.ams.org/mathscinet/search/publdoc.html?pg1=INDI&s1=663252&vfpref=pdf&r=58&mx-pid=1928399`. Zuletzt eingesehen am 09.12.2015.

[6] Dieudonné, J.: *Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis.* Bull. Soc. Math. France, 70:46–75, 1942.

[7] Dieudonné, J.: *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables.* Arch. Math., 1:282–287, 1949.

[8] Dudenredaktion: *DUDEN. Die deutsche Rechtschreibung.* Mannheim: Dudenverlag, 21. Auflage, 1996.

[9] Fillmore, P., C. Laurie und H. Radjavi: *On matrix spaces with zero determinant.* Linear and Multilinear Algebra, 18:255–266, 1985.

[10] Fischer, G.: *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 16. Auflage, 2008.

[11] Flanders, H.: *On spaces of linear transformations with bounded rank.* J. London Math. Soc., 37:10–16, 1962.

[12] Frobenius, G.: *Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* Berl. Ber., 1897:994–1015, 1897.

[13] Guterman, A.: *Frobenius type theorems in the noncommutative case.* Linear and Multilinear Algebra, 48:293–311, 2001.

[14] Hulek, K.: *Elementare Algebraische Geometrie. Grundlegende Begriffe und Techniken mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2. Auflage, 2012.

[15] James, D. G.: *On the automorphisms of* $\det(x_{ij})$. Math. Chronicle, 9:35–40, 1980.

[16] Kutyniok, G.: *Hinweise zum Schreiben einer Abschlussarbeit.* `http://www.math.tu-berlin.de/fileadmin/i26_fg-kutyniok/Kutyniok/Sonstiges/Hinweise_zu_Abschlussarbeiten.pdf`. Zuletzt eingesehen am 06.01.2016.

[17] Li, C. K. und S. Pierce: *Linear preserver problems.* Amer. Math. Monthly, 108:591–605, 2001.

[18] Liesen, J. und V. Mehrmann: *Lineare Algebra. Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2. Auflage, 2015.

[19] Marcus, M. und F. C. May: *The permanent function.* Canad. J. Math., 14:177–189, 1962.

[20] Marcus, M. und B. N. Moyls: *Linear transformations on algebras of matrices.* Canad. J. Math., 11:61–66, 1959.

[21] McDonald, B. R.: *R-linear endomorphisms of* $(R)_n$ *preserving invariants.* Mem. Amer. Math. Soc., 46:iv+67, 1983.

[22] Minc, H.: *Linear transformations on matrices: rank* 1 *preservers and determinant preservers.* Linear and Multilinear Algebra, 4:265–272, 1976/77.

[23] Pierce, S. *et al.*: *A survey of linear preserver problems.* Linear and Multilinear Algebra, 33:1–129, 1992.

[24] Pierce, S. und W. Watkins: *Invariants of linear maps on matrix algebras.* Linear and Multilinear Algebra, 6:185–200, 1978/79.

[25] Stein, S.: *LaTeX Tutorial & Einführung mit Beispielen.* `http://latex.hpfsc.de`. Zuletzt eingesehen am 06.01.2016.

[26] van der Waerden, B. L.: *Gruppen von linearen Transformationen.* Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete. 4, Berlin: Julius Springer, 1935.

[27] Waterhouse, W. C.: *Automorphisms of* $\det(X_{ij})$*: the group scheme approach.* Adv. in Math., 65:171–203, 1987.

[28] *Wikibooks - LaTeX.* `https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX`. Zuletzt eingesehen am 10.01.2016.

[29] Zieschang, H.: *Lineare Algebra und Geometrie.* Stuttgart: B. G. Teubner, 1. Auflage, 1997.