



Optimale Einbettung von virtuellen Netzen in Übertragungsnetzwerke

Als Betreiber eines Kommunikationsnetzwerkes besitzt die Deutsche Telekom AG ein Netz von Leitungen. Mobilfunkbetreiber und andere Großkunden sind daran interessiert, zwischen verschiedenen Orten permanente Verbindungen zu mieten, die als sogenanntes Backbone eines Mobilfunknetzes oder zur Vernetzung von Firmenstandorten genutzt werden. Diese Verbindungen werden über das bestehende Leitungsnetz realisiert, indem man je einen Leitungsweg zwischen den geforderten Ortspaaren findet. Jedes benutzte Leitungsstück verursacht dem Betreiber Kosten, die von der Länge und anderen Faktoren abhängen. Daher möchte der Netzbetreiber

die gewünschten Verbindungen so kostengünstig wie möglich verwirklichen.

Bisher werden die einzelnen Verbindungen individuell – also unabhängig voneinander – auf dem Leitungsnetz realisiert. Dabei kommt es häufig vor, daß verschiedene Verbindungen sich ein Kabelstück oder einen Knotenpunkt teilen müssen. Der Ausfall eines solchen Stückes oder Knotenpunktes führt dann zum Ausfall aller betroffenen Verbindungen. Dadurch sinkt die Zuverlässigkeit und damit die Attraktivität der Dienstleistung für den Kunden.

Sind die einzelnen Verbindungen dagegen ohne gemeinsame Leitungen/Knotenpunkte realisiert, also

disjunkt, so zieht der Ausfall einer Leitung bzw. eines Knotenpunktes immer auch nur eine geschaltete Verbindung in Mitleidenschaft.

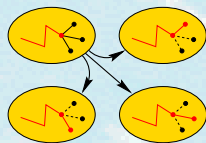
Ziel der Deutschen Telekom AG ist es also, alle gewünschten Verbindungen eines Kunden ohne gemeinsame Leitungen bzw. Knotenpunkte zu realisieren und dabei so kostengünstig wie möglich zu planen. Zu diesem Zweck kommen Methoden der kombinatorischen Optimierung zum Einsatz, die in der Arbeitsgruppe *Kombinatorische Optimierung und Graphenalgorithmen* entwickelt wurden.

Das Problem

Die Aufgabe läßt sich wie folgt als mathematisches Optimierungsproblem formulieren. Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit Kosten auf den Kanten. Dieser Graph stellt das vorhandene Leitungsnetz dar. Ein Kundenwunsch ist die Realisierung eines virtuellen Netzes, d. h. einer Menge von Knotenpaaren, zwischen denen paarweise *disjunkte* Verbindungen hergestellt werden sollen. Jede solche Verbindung ist dann ein Weg im Graphen zwischen den zugehörigen Knoten eines Paares. Gesucht ist eine solche *Einbettung* des virtuellen Netzes in den zugrundeliegenden Graphen, die minimale Kosten verursacht. Die Kosten entsprechen der Summe der Kosten auf den benutzten Graphkanten. Dieses Problem gehört zu der Klasse der NP-schweren Probleme.

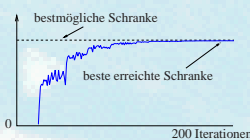
Die Methoden

Es kommt ein spezieller Zuschnitt der Branch-and-Bound Methode zur Anwendung. Die Idee besteht darin, das Gesamtproblem rekursiv in immer kleinere Teilprobleme aufzuspalten (*branching*), die sich entweder direkt lösen oder selbst weiter aufspalten lassen, oder die als irrelevant erkannt werden können (*bounding*). Zusätzlich muß eine Auswahlregel formuliert werden, die die Reihenfolge der entstehenden Teilprobleme festlegt (*searching*).



Definition von Teilproblemen durch Zuordnung jeweils einer neuen Kante zur roten Verbindung. Die gestrichelten Kanten können dann nicht mehr gewählt werden.

zung einer Kante bzw. eines Knotens erzwingt, oder wenn jede Lösung höhere Kosten haben muß als eine bereits bekannte (globale) Lösung. Letztere Abschätzung ist durch Berechnung einer unteren Schranke für die Optimalkosten eines Teilproblems möglich. Das gelingt durch eine sogenannte *Lagrange-Relaxation*: man gibt die geforderte Disjunktheit der Verbindungen auf, „bestraft“ die mehrfache Benutzung von Kanten/Knoten jedoch intern durch Mehrkosten.



Iterative Verbesserung der von der Lagrange-Relaxation gelieferten unteren Schranken für die Kosten.

Branching: Ein Teil der Lösungsstruktur wird festgelegt. In unserem Fall erfolgt dies dadurch, daß eine bestimmte Graphkante der Einbettung einer bestimmten Verbindung zugeordnet wird. Das entspricht einer Färbung dieser Kante mit der „Farbe“ dieser Verbindung. Durch Auswahl sich gegenseitig ausschließender Färbungen entstehen hier mehrere Teilprobleme.

Bounding: Ein Teilproblem kann vom weiteren Lösungsprozeß ausgeschlossen werden, wenn es entweder eine inhärente Struktur aufweist, die die Doppelbenutzung einer Kante bzw. eines Knotens erzwingt, oder wenn jede Lösung höhere Kosten haben muß als eine bereits bekannte (globale) Lösung. Letztere Abschätzung ist durch Berechnung einer unteren Schranke für die Optimalkosten eines Teilproblems möglich. Das gelingt durch eine sogenannte *Lagrange-Relaxation*: man gibt die geforderte Disjunktheit der Verbindungen auf, „bestraft“ die mehrfache Benutzung von Kanten/Knoten jedoch intern durch Mehrkosten.

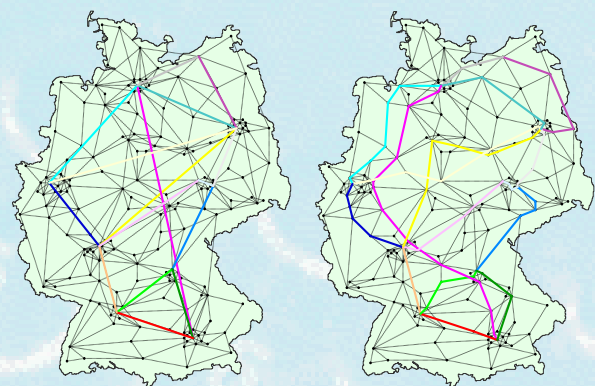
Im Kern wird hier ein effizienter Kürzeste-Wege-Algorithmus verwendet. Mit einem simplen Verfahren lassen sich die gelieferten Schranken noch iterativ verbessern. Die so erreichte Güte ist i. d. R. sehr zufriedenstellend. Oft liefert dieses Verfahren auch Lösungen, die mittels graphentheoretischer Methoden nachbehandelt werden können. Dadurch erhält man disjunkte Einbettungen, gegen deren Kosten die unteren Schranken verglichen werden können.

Die Ziele

Die Ziele des Projektes waren die Entwicklung und Anpassung mathematischer Methoden für die optimale Einbettung virtueller Netze in Übertragungsnetzwerke. Auch sollte die zuvor beschriebene Branch-and-Bound Methode mit Ansätzen auf Basis von Dynamischer Programmierung und Backtracking verglichen werden, die aber insgesamt schlechter abgeschnitten haben. Weiterhin sollten Programme entwickelt werden, die sowohl den kanten- als auch den knotendisjunkten Fall möglichst effizient lösen können.

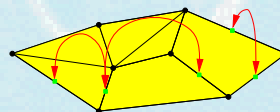
Gibt es für eine Probleminstanz keine disjunkte Einbettung aller Verbindungen, so ist die Deutsche Telekom AG daran interessiert, möglichst viele der angeforderten Verbindungen zu realisieren. Dieses Problem ist erheblich komplexer als das ursprüngliche. Es

ließen sich jedoch verwandte Methoden anwenden, die ebenfalls in Programme umgesetzt worden sind.



Beispielnetzwerk mit gewünschten Verbindungen (links) und optimale knotendisjunkte Lösung (rechts). Die Rechenzeiten liegen bei diesen Größenordnungen im Sekundenbereich.

Ein verwandtes Problem



Graph mit Paaren von sog. *abhängigen* Kanten (rot). Von jedem Paar darf höchstens eine Kante in einer Lösung auftreten.

Aus der Kooperation mit dem Projektpartner ergab sich ein interessantes neues graphentheoretisches Problem. Es tritt nämlich eine Verschärfung der Disjunktheit ein, wenn man beachtet, daß sich verschiedene Leitungen physisch parallele Abschnitte, wie beispielsweise ein Rohrstück, teilen. Im graphentheoretischen Modell bedeutet das, daß *verschiedene* Kanten nicht simultan genutzt werden dürfen. Neben der Entwicklung der Theorie für dieses neue Problem wurden ebenfalls Lösungsalgorithmen implementiert.

Kooperationspartner und Mitarbeiter

Das Projekt wurde durch die Deutsche Telekom AG, Forschungszentrum Darmstadt, getragen. Als Programmiersprachen wurden C und C++ benutzt. Die erstellte Software wird bei der Deutschen Telekom AG unterstützend zur Angebotserstellung eingesetzt.

Die Projektdauer betrug ein Jahr, beginnend im Juli 1995. Während dieser Zeit wurden ein wissenschaftlicher sowie ein studentischer Mitarbeiter gefördert. Die Entwicklung von Teilalgorithmen sowie ihre Erprobung waren Gegenstand einer Diplomarbeit.

Die beteiligten Wissenschaftler und studentischen Mitarbeiter an der TU Berlin waren:

- Ewgenij Gawrilow
- Olaf Jahn
- Rolf H. Möhring
- Martin Oellrich
- Andreas S. Schulz

Weitere Informationen unter:

http://www.math.tu-berlin.de/coga/research/disjoint_routing/

