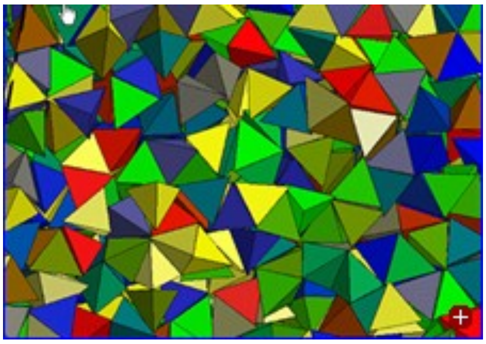
Frankfurter Allgemeine
FAZ.NET

Mathematik

Tetraederpackung: Eins geht noch

Kann man regelmäßige vierseitige Pyramiden lückenlos stapeln? Nein, wissen die Mathematiker. Aber wie dicht lassen sie sich dann eigentlich zusammenpacken?

Von Heinrich Hemme



Mehr als 85 Prozent des Raums lassen sich mittlerweile mit Tatraedern füllen

11. Februar 2010 Anders als Ziegelsteine kann man regelmäßige Tetraeder nicht so stapeln, dass keine Lücken zwischen ihnen frei bleiben. Wie dicht man sie allerdings stapeln kann, ist noch eines der ungelösten Probleme der Mathematik. Anfang Januar ist es der amerikanischen Mathematikerin Elizabeth R. Chen immerhin gelungen, die Tetraeder so dicht zu packen, dass sie den Raum zu 85,635 Prozent ausfüllen, eine Dichte, die noch ein Jahr zuvor für unmöglich gehalten wurde.

Das Tetraederpackungsproblem hat ei- ne lange Geschichte, die vor über 2300 Jahren in Griechenland mit einem Irrtum begann. Der Philosoph Aristoteles wusste aus dem Buch Timaios seines Lehrers Platon, dass es fünf regelmäßige konvexe Polyeder gibt – das Tetraeder, den Würfel (Hexaeder), das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder –, die man seither auch als Platonische Körper bezeichnet. Der einfachste von ihnen, das regelmäßige Tetraeder, ist eine Pyramide, deren Grundfläche und drei Seitenflächen gleich große gleichseitige Dreiecke sind. Aristoteles schrieb, dass man lauter gleiche regelmäßige Tetraeder so stapeln könne, dass sie den Raum lückenlos füllen, und dass von den anderen vier Platonischen Körpern nur noch der Würfel diese Eigenschaft habe.

Fast 1800 Jahre lang zweifelte niemand an dieser Behauptung von Aristoteles. Erst im 15. Jahrhundert überprüfte sie der Mathematiker und Astronom Johannes Müller, der besser als Regiomontanus bekannt ist, und stellte fest, dass sie zwar für den Würfel, nicht aber für das regelmäßige Tetraeder stimmt. Seither versuchen einige Mathematiker herauszufinden, wie man regelmäßige Tetraeder anordnen muss, dass sie, wenn sie sich auch nicht lückenlos stapeln lassen, doch zumindest möglichst wenig Raum frei lassen.

Packungsfragen

Im Jahre 1900 stellte der große deutsche Mathematiker David Hilbert auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris seine berühmte Liste der 23 wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik vor. Vier Jahre später schrieb er, dass das Tetraederpackungsproblem ein Spezialfall seines achtzehnten Problems sei, und schränkte es etwas ein. Er stellte die Frage, den wievielten Teil des Raums Tetraeder höchstens ausfüllen können, wenn man sie kristallin anordnet, also wie die Atome in einem Kristall oder die Eier in einem Eierkarton, so dass sie alle durch Parallelverschiebungen um feste Werte ineinander übergehen. Noch im selben Jahr gab der bekannte Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski eine Antwort: 9/38 (etwa 23,7 Prozent) des Raumes. Minkowski erging es jedoch nicht besser als Aristoteles, er irrte sich. 1961 fand der Österreicher Helmut Grömer eine Anordnung der Tetraeder, die den Raum zu 18/49 (etwa 36,7 Prozent) ausfüllen, und noch im selben Jahr konnte der amerikanische Mathematiker Douglas J. Hoylman beweisen, dass sie auch tatsächlich die dichteste Tetraederpackung unter Hilberts Bedingungen ist. Damit war aber natürlich das allgemeine Tetraederpackungsproblem noch immer nicht gelöst.

Zum Thema

Systembiologie: Netze, so weit das Auge reicht

Fraktale: Die Höhlen der Mathematik

Mathematik: Die Kunst des komplexen Zählens

Der bekannte polnische Mathematiker Stanisaw Ulam vermutete im Jahre 1972, dass man alle konvexen Körper, die man sich nur denken kann, einschließlich des regelmäßigen Tetraeders dichter stapeln kann als Kugeln. Dadurch hatte Ulam das Tetraederpackungsproblem mit einem anderen, zur damaligen Zeit noch ungelösten mathematischen Problem verknüpft. Der deutsche Astronom und Mathematiker Johannes Kepler hatte 1611 vermutet, dass bei der dichtest möglichen Packung gleicher Kugeln der Raum zu /18 (etwa 74,0 Prozent) ausgefüllt wird. Erst 1998 gelang es dem Amerikaner Thomas C. Hales, Keplers Vermutung zu beweisen.

Im Jahre 2006 versuchten der Mathematiker John Horton Conway und der Chemiker Salvatore Torquato mit einem Computeralgorithmus, den die beiden deutschen Mathematiker Ulrich Betke und Martin Henk sechs Jahre vorher entworfen hatten, das allgemeine Tetraederproblem zu lösen. Doch alle Anordnungen, die sie überprüften, führten zu einer Packungsdichte, die höchstens 0,7166 betrug und damit geringer war als die von Kugeln. Sollte etwa Ulams Vermutung für regelmäßige Tetraeder falsch sein?

Der Durchbruch im Jahr 2008

Um dies zu überprüfen, beschritten 2007 die Physiker Paul Chaikin, Stacy Wang und Alexander Jaoshvili einen in der Mathematik recht ungewöhnlichen Weg. Sie besorgten sich in einem Spielwarenladen eine große Anzahl gleicher tetraederförmiger Spielwürfel, warfen sie in einen Behälter, schüttelten sie gut durch und zählten anschließend, wie viele Spielwürfel in ihrem Behälter waren. Daraus konnten sie eine Packungsdichte von 75 Prozent berechnen. Da die Spielwürfel aber abgerundete Ecken und Kanten besaßen, ergab sich eine Ungenauigkeit derart, dass die Dichte sowohl um drei Prozent größer als auch um drei Prozent kleiner als die von Kugeln gewesen sein kann.

Im Jahre 2008 kam dann der große Durchbruch. Elizabeth R. Chen, eine Mathematikdoktorandin an der University of Michigan in Ann Arbor, gelang es, die Tetraeder so dicht zu stapeln, dass sie etwa 77,86 Prozent des Raums ausfüllten, und somit zu beweisen, dass man auch Tetraeder dichter packen kann als Kugeln. Dazu setzte sie jeweils neun Tetraeder auf komplizierte Weise zusammen und ordnete diese Gebilde kristallin in regelmäßigen Abständen neben-, hinter- und übereinander an. Chens Erfolg löste eine ganze Lawine weiterer Arbeiten zum Tetraederpackungsproblem aus, und ein Rekord jagte den anderen. Durch kleine Änderungen von Chens Struktur konnten der Chemiker Salvatore Torquato und der Ingenieur Yang Jiao die Packungsdichte auf 78,20 Prozent und Forscher um den Chemiker Amir Haji-Akbari auf 78,37 Prozent erhöhen.

Packungsdichte von 100/117

Nun wurden auch statt der periodischen Anordnung der Tetraeder unperiodische Muster untersucht. Damit erreichten die Forscher um Haji-Akbari eine Packungsdichte von 78,58 Prozent und etwas später Torquato und Jiao 82,23 Prozent. Dieser Wert wurde im Dezember 2009 von den Physikern Yoav Kallus, Veit Elser und Simon Gravel übertrumpft, die durch eine regelmäßige Anordnung der Tetraeder eine Packungsdichte von 100/117 (etwa 85,47 Prozent) schafften. Ihre Anordnung wurde wenige Tage später von Torquato und Jiao etwas verändert, was zu einer Dichte von 12250/14319 (etwa 85,551 Prozent) führte.

Schließlich kam Elizabeth Chen wieder ins Spiel. Sie setzte je zwei Tetraeder so zusammen, dass zwei Flächen aufeinander fielen und eine Doppelpyramide entstand. Die Doppelpyramiden konnte sie zuletzt derart in regelmäßigen Abständen anordnen, dass sie den Raum zu 4000/4671 (etwa 85,635 Prozent) ausfüllen. Trotz dieses beeindruckenden Ergebnisses ist das Ende der schon fast zweieinhalbtausendjährigen Suche noch nicht erreicht, denn niemand weiß, wie weit man die Dichte der Tetraederpackungen noch erhöhen kann.

Text: F.A.Z.
Bildmaterial: Grafik Kaiser