

Übung 3

Übung 3.1 Sei $P \in \mathcal{C}^n$ ein einfaches n -Polytop. Man zeige, dass jede j -Seite von P in genau $\binom{n-j}{n-i}$ i -Seiten von P enthalten ist, $i \geq j$.

Übung 3.2 Sei $C(n, m)$ das zyklische Polytop bzgl. den Punkten $\gamma(t_i)$, $1 \leq i \leq m$.

- i) Man zeige, dass $\gamma(t_i)$ Ecke von $C(n, m)$ ist.
- ii) Sei weiterhin $\tilde{C}(n, m) = \text{conv} \{ \gamma(s_i) : 1 \leq i \leq m \}$ für paarweise verschiedene s_i . Man zeige, dass es eine Bijektion zwischen den k -Seiten von $C(n, m)$ und $\tilde{C}(n, m)$ gibt.

Übung 3.3 Ein Polytop P heisst k -nachbarschaftlich, $k \in \{1, \dots, n\}$, falls die konvexe Hülle jeder k -Teilmenge der Ecken von P eine Seite ist. Man zeige:

- i) Ist P ein k -nachbarschaftliches Polytop, dann sind je k Ecken affin unabhängig.
- ii) Jede l Seite eines k -nachbarschaftlichen Polytops ist ein Simplex für $l \leq k - 1$.

Übung 3.4 Sei P ein k -nachbarschaftliches n -Polytop mit $k \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Dann ist $f_0(P) = n + 1$, d.h., P ist ein n -Simplex. (Hinweis: Radon hilft...)

Übung 2

Übung 2.1

- i) Man zeige, dass jede Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ mit Durchmesser höchstens 1, d.h., der maximale (euklidische) Abstand von zwei Punkten aus X ist durch 1 beschränkt, in einem Kreis mit Radius höchstens $1/\sqrt{3}$ enthalten ist. Gleichheit gilt hier nur dann, wenn X drei Punkte enthält, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge 1 sind. (Hinweis: Helly und so...)
- ii) Wie könnte ein analoges Resultat im \mathbb{R}^n aussehen?

Übung 2.2 Sei $K \in \mathcal{C}^n$ kompakt und $0 \in \text{int } K$. Für einen i -dimensionalen linearen Teilraum $L \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq i \leq n$, sei $K|L$ die orthogonale Projektion von K auf L . Man zeige:

$$(K|L)^* \cap L = K^* \cap L \text{ und/bzw. } (K \cap L)^* \cap L = K^*|L.$$

Übung 2.3

- i) Sei $T_n = \text{conv}\{v_0, \dots, v_n\}$ ein n -Simplex. Man zeige: F ist eine i -Seite von T_n genau dann, wenn $F = \text{conv}\{v_{i_j} : j \in I\}$ für eine $i+1$ -elementige Teilmenge I von $\{0, \dots, n\}$.
- ii) Sei $P \in \mathcal{P}^n$ ein n -dimensionales Polytop. Man zeige: $\sum_{i=-1}^n f_i(P) \geq 2^{n+1}$ mit Gleichheit genau dann, wenn P ein n -Simplex ist.

Übung 2.4 Sei $Q \in \mathcal{P}^n$ mit $\dim Q = n-1$.

- i) Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \text{aff } Q$. Dann heisst $P = \text{conv } Q \cup \{v\}$ Pyramide über Q mit Basis von Q und Spitze v . Man zeige: $f_k(P) = f_k(Q) + f_{k-1}(Q)$, $0 \leq k \leq n-1$.
- ii) Sei $\text{conv}\{x, y\} \not\subseteq \text{aff } Q$ eine Strecke mit $\text{relint } Q \cap \text{relint } \text{conv}\{x, y\} \neq \emptyset$. Dann heißt $P = \text{conv}(Q \cup \text{conv}\{x, y\})$ Doppelpyramide über Q . Man zeige:

$$f_k(P) = \begin{cases} f_k(Q) + 2f_{k-1}(Q), & 0 \leq k \leq n-2, \\ 2f_{n-2}(Q), & k = n-1. \end{cases}$$

iii) Sei $x \notin \text{aff } Q$. Dann heisst $P = Q + \text{conv} \{-x, x\}$ Prisma mit Basis Q . Man zeige:

$$f_k(P) = \begin{cases} 2f_0(Q), & k = 0, \\ 2f_k(Q) + f_{k-1}(Q), & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Übung 2.5 Man zeige, dass jedes Polytop $P \in \mathcal{P}^n$ Projektion eines geeigneten Simplex $S \subset \mathbb{R}^N$ ist.

Übung 2.6 Man zeige, dass jede Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ mit Durchmesser (höchstens) 1 in drei Mengen aufgeteilt werden kann, die alle einen Durchmesser kleiner als 1 haben. (Hinweis: Aufgabe 2.1 könnte/sollte helfen ...)

Übung 1

Übung 1.1 Man zeige oder widerlege:

- i) $\text{conv}\{X + Y\} = \text{conv} X + \text{conv} Y$ für alle $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$.
- ii) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, dann ist $\text{conv} X$ abgeschlossen.
- iii) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist $\text{conv} X$ offen.
- iv) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann ist $\text{conv} X$ kompakt.
- v) Für $K \in \mathcal{C}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$.

Übung 1.2 Sei $T = \text{conv}\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ ein k -Simplex, und sei $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq k + 1$, mit $\sum \lambda_i = 1$. Dann ist $\sum \lambda_i x_i \in \text{relint} T$.

Übung 1.3 Sei $K \in \mathcal{C}^n$ abgeschlossen und sei $x \notin K$. Dann ist

$$\Phi_K(z) = \Phi_K(x) \text{ für alle } z \in R(x) = \{\Phi_K(x) + \lambda(x - \Phi_K(x)) : \lambda \geq 0\}.$$

Übung 1.4 Sei $K \in \mathcal{C}^n$ abgeschlossen und sei $x \in \text{relbd} K$. Dann gibt es eine Stützhyperebene $H(a, \alpha)$ von K mit $x \in H(a, \alpha)$.

Übung 1.5 Man folgere aus Satz 1.13 (Trennungssatz) das sogenannte Farkas Lemma:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es ein nicht-negatives $x \in \mathbb{R}^n$, d.h. $x \geq 0$, mit $Ax = b$ genau dann, wenn $\langle b, y \rangle \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^\top y \geq 0$.

Übung 1.6 Seien $K_1, \dots, K_m, C \in \mathcal{C}^n$. Für jede Auswahl von $n + 1$ Mengen $K_{i_1}, \dots, K_{i_{n+1}}$ gebe es ein $u \in \mathbb{R}^n$, so dass das Translat $u + C$ die Mengen $K_{i_1}, \dots, K_{i_{n+1}}$ schneidet. Man zeige, dass es dann auch ein $u \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $u + C$ alle Mengen K_1, \dots, K_m schneidet.

Übung 1.7 Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ endliche Mengen. Man zeige, dass es für X und Y genau dann eine strenge Trennhyperebene gibt, falls zu jedem Paar von Teilmengen $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ mit $\#X' + \#Y' \leq n + 2$ eine solche strenge Trennebene existiert.

Hinweis: Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^n$ untersuche man

$$H(x) = \{(h_1, \dots, h_{n+1})^\top \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^n h_i x_i < h_{n+1}\}$$

auf Konvexität und wende den Satz von Helly an.

Besprechung der Übung am 19.04.2011