Übung 4

Übung 4.1 *Sei P ein 4-dimensionales zyklisches Polytop mit 7 Ecken.*

i) *Man bestimme die (eine) Gale Transfromierte von P.*

ii) *Man bestimme den Seitenverband von P.*

Übung 4.2 *Ein n-dimensinales Polytop $P = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_m\}$ mit Ecken v_i, $1 \le i \le m$, ist simplizial genau dann, wenn für die Gale Transformierte $\{b_1, \ldots, b_m\}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m-(n+1)}$, und jede Hyperebene $H(a, 0) \subset \mathbb{R}^{m-(n+1)}$ (die 0 enthält) gilt: $0 \notin \operatorname{relint}\operatorname{conv}(\{b_1, \ldots, b_m\} \cap H(a, 0))$.*

Übung 4.3 *Man bestimme alle kombinatorischen Typen von simplizialen n-Polytopen mit $n + 2$ Ecken.*

Übung 4.4 *Für eine endliche Punktmenge $W = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset \mathbb{R}^n$ heisst*

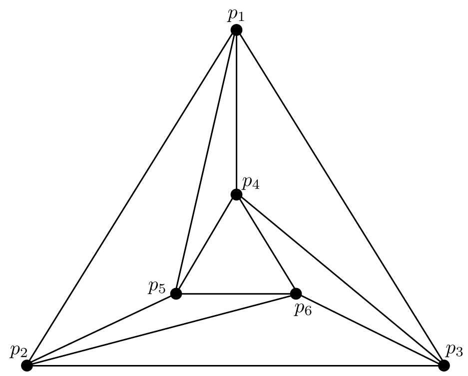
$$\operatorname{vor}(w_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |w_i - x| \le |w_j - x| \text{ für alle } 1 \le j \le m\}$$

Voronoi-Zelle *von W in w_i, und $\cup_{i=1}^m \operatorname{vor}(w_i)$ heisst* Voronoi-Diagramm. *(Hierbei ist $|\cdot|$ die Euklidische Norm.)*

i) *Man zeige, dass die Voronoi-Zellen konvexe Polyeder sind.*

ii) *Sei v Ecke von $\operatorname{vor}(w_i)$. Man zeige, dass es eine Kugel mit Mittelpunkt v gibt, die im Inneren keine Punkte aus W enthält, aber mindestens $n + 1$ Punkte aus W liegen auf dem Rand der Kugel.*

Übung 4.5 *Man zeige, dass die folgende Triangulierung nicht regulär ist. (Hinweis: Für die (möglichen) Höhen der Ecken p_4, p_5, p_6 kann man annehmen, dass sie alle 0 sind (warum?). Anschließend untersuche man Bedingungen für die Höhen p_1, p_2, p_3.)*



Übung 4.6 *Seien* $a_i \in \mathbb{Z}^n$, $1 \leq i \leq n$, *linear unabhängig, und sei* $P = \{\sum_{i=1}^n \rho_i\, a_i : 0 \leq \rho_i < 1,\ 1 \leq i \leq n\}$. *Man zeige oder widerlege: Für* $t \in \mathbb{R}^n$ *gilt* $\#((t+P) \cap \mathbb{Z}^n) = \#(P \cap \mathbb{Z}^n)$.

Besprechung der Übung am 21.06.2010

Übung 3

Übung 3.1 *Sei $P \in \mathcal{C}^n$ ein einfaches n-Polytop. Man zeige, dass jede j-Seite von P in genau $\binom{n-j}{n-i}$ i-Seiten von P enthalten ist, $i \geq j$.*

Übung 3.2 *Sei $C(n, m)$ das zyklische Polytop bzgl. den Punkten $\gamma(t_i)$, $1 \leq i \leq m$.*

i) *Man zeige, dass $\gamma(t_i)$ Ecke von $C(n, m)$ ist.*

ii) *Sei weiterhin $\tilde{C}(n, m) = \operatorname{conv}\{\gamma(s_i) : 1 \leq i \leq m\}$ für paarweise verschiedene s_i. Man zeige, dass es eine Bijektion zwischen den k-Seiten von $C(n, m)$ und $\tilde{C}(n, m)$ gibt.*

Übung 3.3 *Ein Polytop P heisst k-nachbarschaftlich, $k \in \{1, \ldots, n\}$, falls die konvexe Hülle jeder k-Teilmenge der Ecken von P eine Seite ist. Man zeige:*

i) *Ist P ein k-nachbarschaftliches Polytop, dann sind je k Ecken affin unabhängig.*

ii) *Jede l Seite eines k-nachbarschaftlichen Polytops ist ein Simplex für $l \leq k - 1$.*

Übung 3.4 *Sei P ein k-nachbarschaftliches n-Polytop mit $k \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Dann ist $f_0(P) = n + 1$, d.h., P ist ein n-Simplex. (*Hinweis: Radon hilft...*)*

Besprechung der Übung am 24.05.2010

Übung 2

Übung 2.1

i) *Man zeige, dass jede Menge* $X \subset \mathbb{R}^2$ *mit Durchmesser höchstens* 1*, d.h., der maximale (euklidische) Abstand von zwei Punkten aus* X *ist durch* 1 *beschränkt, in einem Kreis mit Radius höchstens* $1/\sqrt{3}$ *enthalten ist. Gleichheit gilt hier nur dann, wenn* X *drei Punkte enthält, die Ecken eines gleichseitiges Dreiecks der Kantenlänge 1 sind. (Hinweis: Helly und so...)*

ii) *Wie könnte ein analoges Resultat im* $\mathbb{R}^n$ *aussehen?*

Übung 2.2 *Sei* $K \in \mathcal{C}^n$ *kompakt und* $0 \in \operatorname{int} K$*. Für einen* i*-dimensionalen linearen Teilraum* $L \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $0 \leq i \leq n$*, sei* $K|L$ *die orthogonale Projektion von* K *auf* L*. Man zeige:*

$$(K|L)^\star \cap L = K^\star \cap L \text{ und/bzw. } (K \cap L)^\star \cap L = K^\star|L.$$

Übung 2.3

i) *Sei* $T_n = \operatorname{conv}\{v_0, \ldots, v_n\}$ *ein* n*-Simplex. Man zeige:* F *ist eine* i*-Seite von* T_n *genau dann, wenn* $F = \operatorname{conv}\{v_{i_j} : j \in I\}$ *für eine* $i+1$*-elementige Teilmenge* I *von* $\{0, \ldots, n\}$*.*

ii) *Sei* $P \in \mathcal{P}^n$ *ein* n*-dimensionales Polytop. Man zeige:* $\sum_{i=-1}^{n} f_i(P) \geq 2^{n+1}$ *mit Gleichheit genau dann, wenn* P *ein* n*-Simplex ist.*

Übung 2.4 *Sei* $Q \in \mathcal{P}^n$ *mit* $\dim Q = n-1$*.*

i) *Sei* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{aff} Q$*. Dann heisst* $P = \operatorname{conv} Q \cup \{v\}$ Pyramide über Q *mit Basis von* P *und Spitze* v*. Man zeige:* $f_k(P) = f_k(Q) + f_{k-1}(Q)$*,* $0 \leq k \leq n-1$*.*

ii) *Sei* $\operatorname{conv}\{x, y\} \not\subset \operatorname{aff} Q$ *eine Strecke mit* $\operatorname{relint} Q \cap \operatorname{relint} \operatorname{conv}\{x, y\} \neq \emptyset$*. Dann heißt* $P = \operatorname{conv}(Q \cup \operatorname{conv}\{x, y\})$ Doppelpyramide über Q*. Man zeige:*

$$f_k(P) = \begin{cases} f_k(Q) + 2f_{k-1}(Q), & 0 \leq k \leq n-2, \\ 2f_{n-2}(Q), & k = n-1. \end{cases}$$

iii) *Sei* $x \notin \operatorname{aff} Q$*. Dann heisst* $P = Q + \operatorname{conv}\{-x, x\}$ Prisma *mit Basis* Q*. Man zeige:*

$$f_k(P) = \begin{cases} 2f_0(Q), & k = 0, \\ 2f_k(Q) + f_{k-1}(Q), & 1 \le k \le n-1. \end{cases}$$

Übung 2.5 *Man zeige, dass jedes Polytop* $P \in \mathcal{P}^n$ *Projektion eines geeigneten Simplex* $S \subset \mathbb{R}^N$ *ist.*

Übung 2.6 *Man zeige, dass jede Menge* $X \subset \mathbb{R}^2$ *mit Durchmesser (höchstens)* 1 *in drei Mengen aufgeteilt werden kann, die alle einen Durchmesser kleiner als* 1 *haben. (Hinweis: Aufgabe 2.1 könnte/sollte helfen ...)*

Besprechung der Übung am 10.05.2010

Übung 1

Übung 1.1 *Man zeige oder widerlege:*

i) $\operatorname{conv}\{X+Y\} = \operatorname{conv} X + \operatorname{conv} Y$ *für alle* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

ii) *Ist* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen, dann ist* $\operatorname{conv} X$ *abgeschlossen.*

iii) *Ist* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, dann ist* $\operatorname{conv} X$ *offen.*

iv) *Ist* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *kompakt, dann ist* $\operatorname{conv} X$ *kompakt.*

v) *Für* $K \in \mathcal{C}^n$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *gilt* $(\lambda + \mu)\, K = \lambda\, K + \mu\, K$.

Übung 1.2 *Sei* $T = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ *ein* k*-Simplex, und sei* $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq k+1$, *mit* $\sum \lambda_i = 1$. *Dann ist* $\sum \lambda_i\, x_i \in \operatorname{relint} T$.

Übung 1.3 *Sei* $K \in \mathcal{C}^n$ *abgeschlossen und sei* $x \notin K$. *Dann ist*

$$\Phi_K(z) = \Phi_K(x) \text{ für alle } z \in R(x) = \big\{\Phi_K(x) + \lambda\big(x - \Phi_K(x)\big) : \lambda \geq 0\big\}.$$

Übung 1.4 *Sei* $K \in \mathcal{C}^n$ *abgeschlossen und sei* $x \in \operatorname{relbd} K$. *Dann gibt es eine Stützhyperebene* $H(a, \alpha)$ *von* K *mit* $x \in H(a, \alpha)$.

Übung 1.5 *Man folgere aus Satz 1.13 (Trennungssatz) das sogenannte Farkas Lemma:*
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $b \in \mathbb{R}^m$. *Dann gibt es ein nicht-negatives* $x \in \mathbb{R}^n$, *d.h.* $x \geq 0$, *mit* $A\, x = b$ *genau dann, wenn* $\langle b, y \rangle \geq 0$ *für alle* $y \in \mathbb{R}^m$ *mit* $A^\intercal y \geq 0$.

Übung 1.6 *Seien* $K_1, \ldots, K_m, C \in \mathcal{C}^n$. *Für jede Auswahl von* $n+1$ *Mengen* $K_{i_1}, \ldots, K_{i_{n+1}}$ *gebe es ein* $u \in \mathbb{R}^n$, *so dass das Translat* $u + C$ *die Mengen* $K_{i_1}, \ldots, K_{i_{n+1}}$ *schneidet. Man zeige, dass es dann auch ein* $u \in \mathbb{R}^n$ *gibt, so dass* $u + C$ *alle Mengen* $K_1, \ldots, K_m$ *schneidet.*

Übung 1.7 *Seien* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ *endliche Mengen. Man zeige, dass es für* X *und* Y *genau dann eine strenge Trennhyperebene gibt, falls zu jedem Paar von Teilmengen* $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ *mit* $\#X' + \#Y' \leq n+2$ *eine solche strenge Trennebene existiert.*
Hinweis: Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^n$ *untersuche man*

$$H(x) = \{(h_1, \ldots, h_{n+1})^\intercal \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n} h_i x_i < h_{n+1}\}$$

auf Konvexität und wende den Satz von Helly an.

Besprechung der Übung am 19.04.2011