Gitterpunkte in konvexen Mengen **Übung 3**
Institut für Algebra und Geometrie WS 2011/2012
Prof. Dr. Martin Henk
Dipl.-Math. Carsten Thiel

Aufgabe 3.1 Seien $P_1, P_2 \subseteq V$ nicht-leere Polyeder und sei $Q = P_1 + P_2$ ihre Minkowski-Summe. Beweisen Sie, dass jede Seite F von Q in der Form $F = G + H$ geschrieben werden kann, wobei G Seite von P_1 und H Seite von P_2 ist.

Aufgabe 3.2 Seien $P_1, P_2 \subseteq V$ nicht-leere Polyeder und sei $Q = P_1 \cap P_2$. Beweisen Sie, dass jede Ecke v von Q in der Form $v = F_1 \cap F_2$, geschrieben werden kann, wobei F_i Seite von P_i ist und $\dim F_1 + \dim F_2 \leq \dim V$.

Aufgabe 3.3 (*Satz von Birkhoff–von Neumann*) Im Raum der $n \times n$ Matrizen $X = (x_{ij})$ sei P die Menge derjenigen Matrizen, die die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

sowie die Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass P ein Polytop der Dimension $(n-1)^2$ ist und dass dessen Ecken genau die *Permutationsmatrizen* X sind, die genau einen Eintrag „1“ und $n-1$ Einträge „0“ in jeder Zeile und jeder Spalte haben.

Hinweis: Beweisen Sie, dass unter den Einträgen jeder Ecke von P mindestens $(n-1)^2$ Nullen auftreten.

Aufgabe 3.4 Seien $r_1, \dots, r_m$ und $c_1, \dots, c_n$ positive ganze Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \,.$$

Im Raum der $m \times n$ Matrizen $X = (x_{ij})$ betrachten wir das *Transportationspolytop* P, bestehend aus denjenigen Matrizen, die die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = r_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = c_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

sowie die Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass eine Ecke X von P nur ganze Einträge hat.

Gitterpunkte in konvexen Mengen **Übung 2**
Institut für Algebra und Geometrie WS 2011/2012
Prof. Dr. Martin Henk
Dipl.-Math. Carsten Thiel

Aufgabe 2.1 Finden Sie Beispiele für abgeschlossene konvexe Mengen $A, B, C \subseteq V$ und eine lineare Transformation $T \colon V \to W$, sodass

$$T(A) \quad \text{und} \quad B + C$$

nicht abgeschlossen sind.

Aufgabe 2.2 Seien V und W Vektorräume und $T \colon V \to W$ eine lineare Abildung und sei $\widetilde{T} \colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ wie in Satz 2.2.
Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}(f * g) = \widetilde{T}(f) * \widetilde{T}(g)$.

Aufgabe 2.3 Sei $I := \{ (\xi_1, \xi_2) \mid 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1 \}$ das Quadrat in der Ebene.
Zeigen Sie, dass

$$[I] * [-\operatorname{int} I] = [0]$$

gilt, wobei $-\operatorname{int} I = \{ (\xi_1, \xi_2) \mid -1 < \xi_1, \xi_2 < 0 \}$.

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion $[P]$ eines unbeschränkten Polyeders $P \subseteq V$ ein Nullteiler ist, d. h. finden Sie ein $f \in \mathcal{P}(V)$ mit $f * [P] = 0$.

Aufgabe 2.5 Wie viele Seiten hat der d-dimensionale Würfel

$$C = \{ (\xi_1, \ldots, \xi_d) \mid 0 \leq \xi_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \ldots, d \}\,?$$

OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG — MATH — FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Gitterpunkte in konvexen Mengen **Übung 1**
Institut für Algebra und Geometrie WS 2011/2012
PROF. DR. MARTIN HENK
DIPL.-MATH. CARSTEN THIEL

Aufgabe 1.1 Seien a und b teilerfremde positive Zahlen und sei

$$S := \{\, m_1 a + m_2 b \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+ \,\}$$

die Menge der Linearkombinationen von a und b mit nicht-negativen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{m \in S} x^m = \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)} \quad \text{für } |x| < 1\,.$$

Geben Sie eine Interpretation der Formel

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)}$$

und vereinfachen Sie diese für $a = 3$ und $b = 7$.

Aufgabe 1.2 Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein allgemeines Gitterpolygon, also die Vereinigung von endlichen vielen einfachen Gitterpolygonen die selbst Gitterpolygon ist. Beweisen Sie zunächst die kombinatorische Eulercharakteristik

$$\chi(P) = F - E + V\,,$$

dabei F die Zahl der Flächen, E die der Kanten und V die der Ecken. Beweisen Sie dann den *Satz von Pick*

$$\mathrm{vol}(P) = \mathrm{G}(\mathrm{int}\, P) + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{G}(\mathrm{bd}\, P) - \chi(P)\,.$$

Aufgabe 1.3 Beweisen Sie die Inklusions-Exklusions-Formel

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} \left[\bigcap_{i \in I} X_i\right]$$

für Mengen $X_i \subset V$, $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 1.4 Sei

$$C := \{\, (\xi_1, \dots, \xi_d) \mid 0 < \xi_i < 1 \text{ für } i = 1, \dots, d \,\}$$

der offene d-dimensionale Würfel im $\mathbb{R}^d$.
Zeigen Sie $[C] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $\chi([C]) = (-1)^d$.