Gitterpunkte in konvexen Mengen **Übung 5**

Institut für Algebra und Geometrie WS 2011/2012

Prof. Dr. Martin Henk
Dipl.-Math. Carsten Thiel

Aufgabe 5.1 Beweisen Sie Satz 6.4.
Hinweis: Kombinieren Sie die Beweise von Satz 5.4 und Satz 6.3. Beweisen Sie die Aussage zunächst für das Simplex und wenden Sie schließlich eine geeignete Projektion an.

Aufgabe 5.2 Sei $P \subset V$ ein unbeschränktes Polyeder der Dimension n, das keine Gerade enthält. Sei $f_i^0(P)$ die Anzahl der beschränkten i-dimensionalen Seiten von P, sei $f_i^\infty(P)$ die Anzahl der unbeschränkten i-dimensionalen Seiten von P und sei $f_i(P) = f_i^0(P) + f_i^\infty(P)$ die Gesamtzahl der i-Seiten. (Wir betrachten P als n-Seite von sich selbst.) Beweisen Sie

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i^0(P) = 1\,, \quad \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+1} f_i^\infty(P) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i(P) = 0\,.$$

Aufgabe 5.3 Sei $P \subset V$ ein Polytop der Dimension n. Beweisen Sie

$$(-1)^n [\operatorname{int} P] = \sum_{\substack{F \subseteq P \\ \text{Seite}}} (-1)^{\dim F} [F]\,.$$

(Wir betrachten P als Seite von sich selbst.)

Aufgabe 5.4 Sei $P \subset V$ ein unbeschränktes Polyeder, das keine Gerade enthält. Beweisen Sie $\chi([\operatorname{int} P]) = 0$.

Gitterpunkte in konvexen Mengen **Übung 4**
Institut für Algebra und Geometrie WS 2011/2012
Prof. Dr. Martin Henk
Dipl.-Math. Carsten Thiel

Aufgabe 4.1 Wir ersetzen die Funktion G_ε aus dem Beweis von Satz 4.3 durch

$$\widetilde{G}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle x,y\rangle \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\widetilde{D}$ diejenige Abbildung, die durch

$$\widetilde{D}(f) = h \quad \text{für} \quad h(y) = \chi\left(\widetilde{G}(x,y)f(x)\right)$$

definiert wird. Beweisen Sie, dass $\widetilde{D}\colon \mathcal{C}(V) \to \mathrm{Bild}(\widetilde{D})$ eine lineare Abbildung ist und berechnen Sie $\widetilde{D}([B])$, wobei $B \subset V$ eine Kugel vom Radius 1 um den Nullpunkt ist.

Aufgabe 4.2 Seien f und g Linearkombinationen von Indikatorfunktionen polyedrischer Kegel in V. Sei D die Abbildung aus Satz 4.3 iii). Zeigen Sie, dass $D(f \cdot g) = D(f) * D(g)$.

Aufgabe 4.3 Sei $P = \{\, x \in V \mid \ell_i(x) \le \alpha_i\,,\ i \in I \,\}$ und für $v \in P$ sei wie gehabt $I_v = \{\, i \in I \mid \ell_i(v) = \alpha_i \,\}$. Beweisen Sie

$$\mathrm{tcone}(P,v) = \{\, x \in V \mid \ell_i(x) \le \alpha_i\,,\ i \in I_v \,\}$$

und

$$\mathrm{fcone}(P,v) = \{\, x \in V \mid \ell_i(x) \le 0\,,\ i \in I_v \,\}\,.$$

Aufgabe 4.4 Sei $P \subset V$, $P \neq \varnothing$, ein Polyeder, das keine Gerade enthält und seien Q die konvexe Hülle der Ecken und C_P der Rezessionskegel von P. Beweisen Sie, dass für jede Ecke v von P gilt

$$\mathrm{tcone}(P,v) = \mathrm{tcone}(Q,v) + C_P\,.$$

Aufgabe 4.5 Sei $P \subset V$, $P \neq \varnothing$, ein Polyeder, das keine Gerade enthält und sei C_P der Rezessionskegel von P. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{v \in \mathrm{vert}(P)} [\mathrm{fcone}(P,v)] \equiv [C_P] \quad \text{modulo Polyeder mit Geraden.}$$

Aufgabe 4.6 Sei $P \subseteq V$ ein Polyeder, $F \subseteq P$ eine Seite von P und sei $v \in \mathrm{rel\,int}(F)$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{tcone}(P,v)$ und $\mathrm{fcone}(P,v)$ nicht von der Wahl von v abhängen.

Man kann also von *Tangentenkegel* $\mathrm{tcone}(P,F)$ und *Kegel der zulässigen Richtungen* $\mathrm{fcone}(P,F)$ einer Seite F von P sprechen.

Gitterpunkte in konvexen Mengen **Übung 3**
Institut für Algebra und Geometrie WS 2011/2012

Prof. Dr. Martin Henk
Dipl.-Math. Carsten Thiel

Aufgabe 3.1 Seien $P_1, P_2 \subseteq V$ nicht-leere Polyeder und sei $Q = P_1 + P_2$ ihre Minkowski-Summe. Beweisen Sie, dass jede Seite F von Q in der Form $F = G + H$ geschrieben werden kann, wobei G Seite von P_1 und H Seite von P_2 ist.

Aufgabe 3.2 Seien $P_1, P_2 \subseteq V$ nicht-leere Polyeder und sei $Q = P_1 \cap P_2$. Beweisen Sie, dass jede Ecke v von Q in der Form $v = F_1 \cap F_2$, geschrieben werden kann, wobei F_i Seite von P_i ist und $\dim F_1 + \dim F_2 \leq \dim V$.

Aufgabe 3.3 (*Satz von Birkhoff–von Neumann*) Im Raum der $n \times n$ Matrizen $X = (x_{ij})$ sei P die Menge derjenigen Matrizen, die die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

sowie die Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass P ein Polytop der Dimension $(n-1)^2$ ist und dass dessen Ecken genau die *Permutationsmatrizen* X sind, die genau einen Eintrag „1“ und $n-1$ Einträge „0“ in jeder Zeile und jeder Spalte haben.

Hinweis: Beweisen Sie, dass unter den Einträgen jeder Ecke von P mindestens $(n-1)^2$ Nullen auftreten.

Aufgabe 3.4 Seien $r_1, \ldots, r_m$ und $c_1, \ldots, c_n$ positive ganze Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \, .$$

Im Raum der $m \times n$ Matrizen $X = (x_{ij})$ betrachten wir das *Transportationspolytop* P, bestehend aus denjenigen Matrizen, die die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = r_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = c_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

sowie die Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass eine Ecke X von P nur ganze Einträge hat.

Gitterpunkte in konvexen Mengen **Übung 2**
Institut für Algebra und Geometrie WS 2011/2012
Prof. Dr. Martin Henk
Dipl.-Math. Carsten Thiel

Aufgabe 2.1 Finden Sie Beispiele für abgeschlossene konvexe Mengen $A, B, C \subseteq V$ und eine lineare Transformation $T\colon V \to W$, sodass

$$T(A) \quad \text{und} \quad B + C$$

nicht abgeschlossen sind.

Aufgabe 2.2 Seien V und W Vektorräume und $T\colon V \to W$ eine lineare Abildung und sei $\widetilde{T}\colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(W)$ wie in Satz 2.2.
Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}(f * g) = \widetilde{T}(f) * \widetilde{T}(g)$.

Aufgabe 2.3 Sei $I \coloneqq \{\, (\xi_1, \xi_2) \mid 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1 \,\}$ das Quadrat in der Ebene. Zeigen Sie, dass

$$[I] * [-\operatorname{int} I] = [0]$$

gilt, wobei $-\operatorname{int} I = \{\, (\xi_1, \xi_2) \mid -1 < \xi_1, \xi_2 < 0 \,\}$.

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion $[P]$ eines unbeschränkten Polyeders $P \subseteq V$ ein Nullteiler ist, d. h. finden Sie ein $f \in \mathcal{P}(V)$ mit $f * [P] = 0$.

Aufgabe 2.5 Wie viele Seiten hat der d-dimensionale Würfel

$$C = \{\, (\xi_1, \ldots, \xi_d) \mid 0 \leq \xi_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \ldots, d \,\}\,?$$

Gitterpunkte in konvexen Mengen
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk
Dipl.-Math. Carsten Thiel

Übung 1
WS 2011/2012

Aufgabe 1.1 Seien a und b teilerfremde positive Zahlen und sei

$$S := \{\, m_1 a + m_2 b \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+ \,\}$$

die Menge der Linearkombinationen von a und b mit nicht-negativen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{m \in S} x^m = \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)} \quad \text{für } |x| < 1\,.$$

Geben Sie eine Interpretation der Formel

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)}$$

und vereinfachen Sie diese für $a = 3$ und $b = 7$.

Aufgabe 1.2 Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein allgemeines Gitterpolygon, also die Vereinigung von endlichen vielen einfachen Gitterpolygonen die selbst Gitterpolygon ist. Beweisen Sie zunächst die kombinatorische Eulercharakteristik

$$\chi(P) = F - E + V\,,$$

dabei F die Zahl der Flächen, E die der Kanten und V die der Ecken. Beweisen Sie dann den *Satz von Pick*

$$\operatorname{vol}(P) = \mathrm{G}(\operatorname{int} P) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G}(\operatorname{bd} P) - \chi(P)\,.$$

Aufgabe 1.3 Beweisen Sie die Inklusions-Exklusions-Formel

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|-1} \left[\bigcap_{i \in I} X_i\right]$$

für Mengen $X_i \subset V$, $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 1.4 Sei

$$C := \{\, (\xi_1, \ldots, \xi_d) \mid 0 < \xi_i < 1 \text{ für } i = 1, \ldots, d \,\}$$

der offene d-dimensionale Würfel im $\mathbb{R}^d$.
Zeigen Sie $[C] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $\chi([C]) = (-1)^d$.