

Gitterpunkte in konvexen Mengen

Institut für Algebra und Geometrie

PROF. DR. MARTIN HENK

DIPL.-MATH. CARSTEN THIEL

Übung 6

WS 2011/2012

Aufgabe 6.1 Seien P_1 und P_2 Polyeder in V . Zeigen Sie:

P_1 und P_2 sind genau dann stark kombinatorisch isomorph, wenn es eine Bijektion $\alpha: \text{vert}(P_1) \rightarrow \text{vert}(P_2)$ gibt mit $\text{fcone}(P_1, v) = \text{fcone}(P_2, \alpha(v))$ für jede Ecke $v \in \text{vert}(P_1)$.

Aufgabe 6.2 Sei $P \subset V$ ein Polytop. Beweisen Sie

$$\sum_{v \in \text{vert}(P)} \Phi([\text{fcone}(P, v)]) = 0.$$

Aufgabe 6.3 Drücken Sie des Einheitswürfels $C = [0, 1]^n$ in \mathbb{R}^n durch die Formel aus Korollar 8.2 ii) aus.

Aufgabe 6.4 Sei $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit paarweise verschiedenen Koordinaten und sei P die konvexe Hülle der $n!$ Punkte, die aus a durch Permutationen der Koordinaten hervorgehen.

Beweisen Sie, dass P ein einfaches Polytop der Dimension $n - 1$ ist, dass in der affinen Hyperebene

$$A = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \}$$

liegt.

Drücken Sie außerdem das Volumen von P als Polytop im $(n - 1)$ -dimensionalen Raum A mit Hilfe der Formel aus Korollar 8.2 ii) aus.



Gitterpunkte in konvexen Mengen

Institut für Algebra und Geometrie

PROF. DR. MARTIN HENK

DIPL.-MATH. CARSTEN THIEL

Übung 5

WS 2011/2012

Aufgabe 5.1 Beweisen Sie Satz 6.4.

Hinweis: Kombinieren Sie die Beweise von Satz 5.4 und Satz 6.3. Beweisen Sie die Aussage zunächst für das Simplex und wenden Sie schließlich eine geeignete Projektion an.

Aufgabe 5.2 Sei $P \subset V$ ein unbeschränktes Polyeder der Dimension n , das keine Gerade enthält. Sei $f_i^0(P)$ die Anzahl der beschränkten i -dimensionalen Seiten von P , sei $f_i^\infty(P)$ die Anzahl der unbeschränkten i -dimensionalen Seiten von P und sei $f_i(P) = f_i^0(P) + f_i^\infty(P)$ die Gesamtzahl der i -Seiten. (Wir betrachten P als n -Seite von sich selbst.) Beweisen Sie

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i^0(P) = 1, \quad \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i^\infty(P) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i f_i(P) = 0.$$

Aufgabe 5.3 Sei $P \subset V$ ein Polytop der Dimension n . Beweisen Sie

$$(-1)^n [\text{int } P] = \sum_{\substack{F \subseteq P \\ \text{Seite}}} (-1)^{\dim F} [F].$$

(Wir betrachten P als Seite von sich selbst.)

Aufgabe 5.4 Sei $P \subset V$ ein unbeschränktes Polyeder, das keine Gerade enthält. Beweisen Sie $\chi([\text{int } P]) = 0$.



Gitterpunkte in konvexen Mengen

Institut für Algebra und Geometrie

PROF. DR. MARTIN HENK

DIPL.-MATH. CARSTEN THIEL

Übung 4

WS 2011/2012

Aufgabe 4.1 Wir ersetzen die Funktion G_ε aus dem Beweis von Satz 4.3 durch

$$\tilde{G}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle x, y \rangle \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei \tilde{D} diejenige Abbildung, die durch

$$\tilde{D}(f) = h \quad \text{für} \quad h(y) = \chi(\tilde{G}(x, y)f(x))$$

definiert wird. Beweisen Sie, dass $\tilde{D}: \mathcal{C}(V) \rightarrow \text{Bild}(\tilde{D})$ eine lineare Abbildung ist und berechnen Sie $\tilde{D}([B])$, wobei $B \subset V$ eine Kugel vom Radius 1 um den Nullpunkt ist.

Aufgabe 4.2 Seien f und g Linearkombinationen von Indikatorfunktionen polyedrischer Kegel in V . Sei D die Abbildung aus Satz 4.3 iii). Zeigen Sie, dass $D(f \cdot g) = D(f) * D(g)$.

Aufgabe 4.3 Sei $P = \{x \in V \mid \ell_i(x) \leq \alpha_i, i \in I\}$ und für $v \in P$ sei wie gehabt $I_v = \{i \in I \mid \ell_i(v) = \alpha_i\}$. Beweisen Sie

$$\text{tcone}(P, v) = \{x \in V \mid \ell_i(x) \leq \alpha_i, i \in I_v\}$$

und

$$\text{fcone}(P, v) = \{x \in V \mid \ell_i(x) \leq 0, i \in I_v\}.$$

Aufgabe 4.4 Sei $P \subset V$, $P \neq \emptyset$, ein Polyeder, das keine Gerade enthält und seien Q die konvexe Hülle der Ecken und C_P der Rezessionskegel von P . Beweisen Sie, dass für jede Ecke v von P gilt

$$\text{tcone}(P, v) = \text{tcone}(Q, v) + C_P.$$

Aufgabe 4.5 Sei $P \subset V$, $P \neq \emptyset$, ein Polyeder, das keine Gerade enthält und sei C_P der Rezessionskegel von P . Beweisen Sie, dass

$$\sum_{v \in \text{vert}(P)} [\text{fcone}(P, v)] \equiv [C_P] \quad \text{modulo Polyeder mit Geraden.}$$

Aufgabe 4.6 Sei $P \subseteq V$ ein Polyeder, $F \subseteq P$ eine Seite von P und sei $v \in \text{relint}(F)$. Beweisen Sie, dass $\text{tcone}(P, v)$ und $\text{fcone}(P, v)$ nicht von der Wahl von v abhängen.

Man kann also von *Tangentenkegel* $\text{tcone}(P, F)$ und *Kegel der zulässigen Richtungen* $\text{fcone}(P, F)$ einer Seite F von P sprechen.



Gitterpunkte in konvexen Mengen

Institut für Algebra und Geometrie

PROF. DR. MARTIN HENK

DIPL.-MATH. CARSTEN THIEL

Übung 3

WS 2011/2012

Aufgabe 3.1 Seien $P_1, P_2 \subseteq V$ nicht-leere Polyeder und sei $Q = P_1 + P_2$ ihre Minkowski-Summe. Beweisen Sie, dass jede Seite F von Q in der Form $F = G + H$ geschrieben werden kann, wobei G Seite von P_1 und H Seite von P_2 ist.

Aufgabe 3.2 Seien $P_1, P_2 \subseteq V$ nicht-leere Polyeder und sei $Q = P_1 \cap P_2$. Beweisen Sie, dass jede Ecke v von Q in der Form $v = F_1 \cap F_2$, geschrieben werden kann, wobei F_i Seite von P_i ist und $\dim F_1 + \dim F_2 \leq \dim V$.

Aufgabe 3.3 (Satz von Birkhoff-von Neumann) Im Raum der $n \times n$ Matrizen $X = (x_{ij})$ sei P die Menge derjenigen Matrizen, die die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

sowie die Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass P ein Polytop der Dimension $(n-1)^2$ ist und dass dessen Ecken genau die *Permutationsmatrizen* X sind, die genau einen Eintrag „1“ und $n-1$ Einträge „0“ in jeder Zeile und jeder Spalte haben.

Hinweis: Beweisen Sie, dass unter den Einträgen jeder Ecke von P mindestens $(n-1)^2$ Nullen auftreten.

Aufgabe 3.4 Seien r_1, \dots, r_m und c_1, \dots, c_n positive ganze Zahlen mit

$$\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n c_j.$$

Im Raum der $m \times n$ Matrizen $X = (x_{ij})$ betrachten wir das *Transportationspolytop* P , bestehend aus denjenigen Matrizen, die die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = r_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = c_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

sowie die Ungleichungen

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j$$

erfüllen. Beweisen Sie, dass eine Ecke X von P nur ganze Einträge hat.



Gitterpunkte in konvexen Mengen

Institut für Algebra und Geometrie

PROF. DR. MARTIN HENK

DIPL.-MATH. CARSTEN THIEL

Übung 2

WS 2011/2012

Aufgabe 2.1 Finden Sie Beispiele für abgeschlossene konvexe Mengen $A, B, C \subseteq V$ und eine lineare Transformation $T: V \rightarrow W$, sodass

$$T(A) \quad \text{und} \quad B + C$$

nicht abgeschlossen sind.

Aufgabe 2.2 Seien V und W Vektorräume und $T: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und sei $\tilde{T}: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(W)$ wie in Satz 2.2.

Zeigen Sie, dass $\tilde{T}(f * g) = \tilde{T}(f) * \tilde{T}(g)$.

Aufgabe 2.3 Sei $I := \{ (\xi_1, \xi_2) \mid 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1 \}$ das Quadrat in der Ebene. Zeigen Sie, dass

$$[I] * [-\text{int } I] = [0]$$

gilt, wobei $-\text{int } I = \{ (\xi_1, \xi_2) \mid -1 < \xi_1, \xi_2 < 0 \}$.

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion $[P]$ eines unbeschränkten Polyeders $P \subseteq V$ ein Nullteiler ist, d. h. finden Sie ein $f \in \mathcal{P}(V)$ mit $f * [P] = 0$.

Aufgabe 2.5 Wie viele Seiten hat der d -dimensionale Würfel

$$C = \{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \mid 0 \leq \xi_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, d \}?$$



Gitterpunkte in konvexen Mengen

Institut für Algebra und Geometrie

PROF. DR. MARTIN HENK

DIPL.-MATH. CARSTEN THIEL

Übung 1

WS 2011/2012

Aufgabe 1.1 Seien a und b teilerfremde positive Zahlen und sei

$$S := \{ m_1 a + m_2 b \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+ \}$$

die Menge der Linearkombinationen von a und b mit nicht-negativen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{m \in S} x^m = \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Geben Sie eine Interpretation der Formel

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1 - x^{ab}}{(1 - x^a)(1 - x^b)}$$

und vereinfachen Sie diese für $a = 3$ und $b = 7$.

Aufgabe 1.2 Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein allgemeines Gitterpolygon, also die Vereinigung von endlich vielen einfachen Gitterpolygone die selbst Gitterpolygon ist. Beweisen Sie zunächst die kombinatorische Eulercharakteristik

$$\chi(P) = F - E + V,$$

dabei F die Zahl der Flächen, E die der Kanten und V die der Ecken. Beweisen Sie dann den *Satz von Pick*

$$\text{vol}(P) = G(\text{int } P) + \frac{1}{2} G(\text{bd } P) - \chi(P).$$

Aufgabe 1.3 Beweisen Sie die Inklusions-Exklusions-Formel

$$\left[\bigcup_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \left[\bigcap_{i \in I} X_i \right]$$

für Mengen $X_i \subset V$, $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 1.4 Sei

$$C := \{ (\xi_1, \dots, \xi_d) \mid 0 < \xi_i < 1 \text{ für } i = 1, \dots, d \}$$

der offene d -dimensionale Würfel im \mathbb{R}^d .

Zeigen Sie $[C] \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ und $\chi([C]) = (-1)^d$.