Übung 3

Übung 3.1 *Sei $v \in \mathbb{Z}^n$ primitiv, und sei $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\, v \oplus \Lambda$, wobei Λ ein Gitter vom Rang $n-1$ ist. Man zeige, dass es eine Basis $b_1, \ldots, b_{n-1}$ von Λ gibt, wobei die Größe (obere Schranke) von $|b_i|_2$ nur von n und $|v|_2$ abhängt.*

Übung 3.2 *Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter. Eine Menge von linear unabhängigen Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\} \in \Lambda$ heisst primitiv, falls $\Lambda \cap (v_1, \ldots, v_k)\mathbb{R}^k = (v_1, \ldots, v_k)\mathbb{Z}^k$. Sei nun $b_1, \ldots, b_n$ Basis von Λ, d.h. $\Lambda = (b_1, \ldots, b_n)\, \mathbb{Z}^n$ und sei $v = \sum_{i=1}^n z_i\, b_i \in \Lambda$, $z_i \in \mathbb{Z}$. Man zeige: Für $1 \leq j \leq n$ gilt*

$$\{b_1, \ldots, b_{j-1}, c\} \text{ primitiv } \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(z_j, \ldots, z_n) = 1.$$

Übung 3.3 *Seien X, Y endliche Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man zeige:*

$$|\{(x, x') \in X \times X : f(x) = f(x')\}| \geq \frac{|X|^2}{|Y|}.$$

Übung 3.4 *Seien X, Y endliche Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei weiterhin $Y_p = \{y \in Y : |\{x \in X : f(x) = y\}| \geq (1/2)|X|/|Y|\}$. Man zeige:*

$$|\{x \in X : f(x) \in Y_p\}| \geq \frac{1}{2}|X|.$$

Besprechung der Übung am 21.06.2012

Übung 2

Übung 2.1 *Sei A endliche Teilmenge einer abelschen Gruppe Z. Man zeige für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$*

$$|nA| \leq \binom{|A|+n-1}{n}.$$

Übung 2.2 *Seien $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, und sei*

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m,\ x_i \geq 0\}.$$

Man zeige: $|A| = \binom{n-1+m}{n-1}$.

Übung 2.3 *Seien $A, B \subseteq Z$ endliche Mengen einer abelschen Gruppe Z. Man zeige, dass es eine Menge $X \subseteq B$ gibt mit $|X| \leq 2\frac{|A+B|}{|A|} - 1$ und*

$$B - B \subseteq X - X + A - A.$$

Übung 2.4 *Sei $A \subseteq \{1, \ldots, N\}$ eine zufällige Menge, wobei jedes $i \in \{1, \ldots, N\}$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in A liegt, und die Auswahl erfolgt unabhängig voneinander. Man zeige, dass* fast sicher *$\{N/2, \ldots, 3N/2\} \subseteq A + A$.*

Übung 2.5 *Für eine endliche Gruppe Z ist die Davenport-Konstante $\mathrm{s}(Z)$ die kleinste Zahl $s \in \mathbb{N}$, so dass für jede Folge $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $a_i \in Z$ mit $m \geq s$ gilt: Es gibt eine Teilfolge A' von Elementen aus A mit $\sum_{a' \in A'} a' = 0$. Man zeige: $\mathrm{s}(Z) \leq |Z|$. Bemerkung: Eine sehr bekannte Vermutung besagt übrigens: $\mathrm{s}((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d) = d(m-1)+1$ (warum nicht kleiner?) – just in case das Wetter ist schlecht.*

Übung 2.6 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ endlich und sei $\dim A \geq d \geq 1$. Man zeige:*

$$|A + A| \geq (d+1)\,|A| - \frac{d(d+1)}{2}.$$

Hinweis: Induktion über d, mit eingebauter Induktion über $|A|$ und ein wenig Geometrie...

Übung 2.7 *Sei Z endliche abelsche Gruppe, und sei $e : Z \times Z \to S^1$ ein Bi-Charakter. Seien $f, g \in \mathbb{C}^Z$. Man zeige:*

i) $f(x) = \sum_{y \in Z} \widehat{f}(y)\, e(x,y)$ (Fourier Umkehr Formel)

ii) $\frac{1}{|Z|} \sum_{x \in Z} f(x)\overline{g(x)} = \sum_{y \in Z} \widehat{f}(y)\, \overline{\widehat{g}(y)}$ (Plancherel Formel)

iii) $\frac{1}{|Z|} \sum_{x \in Z} |f(x)|^2 = \sum_{y \in Z} |\widehat{f}(y)|^2$ (Parsevalsche Identität)

Besprechung der Übung am 31.05.2012

Otto-von-Guericke
Universität Magdeburg

Kombinatorische Zahlentheorie

Prof. Dr. Martin Henk
SS 2012

Übung 1

Übung 1.1 *Man charakterisiere alle endlichen Teilmengen* $A, B \subset \mathbb{Z}$, $|A|, |B| \geq 2$, *mit* $|A+B| = |A| + |B| - 1$.

Übung 1.2 *Seien* $A, B \subseteq G$ *endlich,* G *abelsch, und* $\Phi : A \cup B \to \Phi(A \cup B)$ *ein Freiman Isomorphismus der Ordnung* 2*). Man zeige* $|A+B| = |\Phi(A)+\Phi(B)|$*. Was gilt für Freiman Isomorphismen einer Ordnung* $k > 2$*?.*

Übung 1.3 *Seien* $A, B \subseteq G$ *endlich,* G *abelsch. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $|A + B| = A$,

ii) $|A - B| = A$,

iii) *Es gibt eine Untergruppe* $U \leq G$*, so dass* B *Teilmenge einer Nebenklasse bzgl.* U *ist, und* A *ist die Vereinigung von Nebenklassen bzgl.* U*.*

iv) $|A + mB - nB| = A$ *für ein* $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$*.*

v) $|A + mB - nB| = A$ *für alle* $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$*.*

Übung 1.4 *Seien* $A, B \subseteq G$ *endlich,* G *abelsch und endlich. Man zeige, dass es en* $x \in G$ *gibt mit*

$$|A \cap (x + B)| \geq \frac{|A||B|}{|G|}.$$

Besprechung der Übung am 19.04.2012