Übung 4

Übung 4.1 *Seien die Zahlen $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit endlich vielen Farben gefärbt. Man zeige,*

i) *Für jedes $k \geq 1$ gibt es unendlich viele einfarbige Mengen der Form $\{x_1, \ldots, x_k, x_1 + \cdots + x_k\}$.*

ii) *Es gibt unendlich viele einfarbige Mengen der Form $\{x, y, x + y\}$ mit $x \neq y$.*

Übung 4.2 *Man beweise Satz 5.26 (Satz von van der Waerden) mit Hilfe von Satz 5.25.*
Hinweis: $N = k^{\overline{d}}$ und Identifikation von P mit $[0, k-1]^{\overline{d}}$ kann helfen.

Übung 4.3 *Für $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\} \subset \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $A[n] = |\{a \in A : 1 \leq a \leq n\}|$. $\sigma(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} A[n]/n$ heisst* Schnirelmann Dichte *von A. Man zeige:*

i) *$\sigma(A) = 1$ genau dann, wenn $\mathbb{N}_{\geq 1} \subseteq A$.*

ii) *Ist $0 \in A \cap B$ und $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$, dann ist $\mathbb{N}_{\geq 1} \subseteq A + B$. (Hinweis: Angenommen nicht, und man betrachte das kleinste n, das nicht in $A + B$ liegt und die Mächtigkiet der Menge $(A \cup (n - B))[n-1]$).*

Übung 4.4 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein 0-symmetrischer n-dimensionaler konvexer Körper (also $K = -K$), der im Inneren als einzigen ganzzahligen Punkt nur den Nullpunkt enthält. Man zeige: $|K \cap \mathbb{Z}^n| \leq 3^n$.*

Besprechung der Übung am ??.??.2012

Übung 3

Übung 3.1 *Sei* $v \in \mathbb{Z}^n$ *primitiv. Man zeige, dass es eine Basis* $v, b_2, \ldots, b_{n-1}$ *von* $\mathbb{Z}^n$ *gibt, wobei die Größe (obere Schranke) von* $|b_i|_2$ *nur von* n *und* $|v|_2$ *abhängt.*

Übung 3.2 *Sei* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gitter. Eine Menge von linear unabhängigen Vektoren* $\{v_1, \ldots, v_k\} \in \Lambda$ *heisst primitiv, falls* $\Lambda \cap (v_1, \ldots, v_k)\mathbb{R}^k = (v_1, \ldots, v_k)\mathbb{Z}^k$*. Sei nun* $b_1, \ldots, b_n$ *Basis von* Λ*, d.h.* $\Lambda = (b_1, \ldots, b_n)\,\mathbb{Z}^n$ *und sei* $v = \sum_{i=1}^n z_i\, b_i \in \Lambda$*,* $z_i \in \mathbb{Z}$*. Man zeige: Für* $1 \leq j \leq n$ *gilt*

$$\{b_1, \ldots, b_{j-1}, c\} \text{ primitiv } \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(z_j, \ldots, z_n) = 1.$$

Übung 3.3 *Seien* X, Y *endliche Mengen, und sei* $f : X \to Y$ *eine Abbildung. Man zeige:*

$$|\{(x, x') \in X \times X : f(x) = f(x')\}| \geq \frac{|X|^2}{|Y|}.$$

Übung 3.4 *Seien* X, Y *endliche Mengen, und sei* $f : X \to Y$ *eine Abbildung. Sei weiterhin* $Y_p = \{y \in Y : |\{x \in X : f(x) = y\}| \geq (1/2)|X|/|Y|\}$*. Man zeige:*

$$|\{x \in X : f(x) \in Y_p\}| \geq \frac{1}{2}|X|.$$

Besprechung der Übung am 21.06.2012

Prof. Dr. Martin Henk
SS 2012

Übung 2

Übung 2.1 *Sei A endliche Teilmenge einer abelschen Gruppe Z. Man zeige für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$*

$$|nA| \leq \binom{|A|+n-1}{n}.$$

Übung 2.2 *Seien $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, und sei*

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m,\ x_i \geq 0\}.$$

Man zeige: $|A| = \binom{n-1+m}{n-1}$.

Übung 2.3 *Seien $A, B \subseteq Z$ endliche Mengen einer abelschen Gruppe Z. Man zeige, dass es eine Menge $X \subseteq B$ gibt mit $|X| \leq 2\frac{|A+B|}{|A|} - 1$ und*

$$B - B \subseteq X - X + A - A.$$

Übung 2.4 *Sei $A \subseteq \{1, \ldots, N\}$ eine zufällige Menge, wobei jedes $i \in \{1, \ldots, N\}$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in A liegt, und die Auswahl erfolgt unabhängig voneinander. Man zeige, dass* fast sicher *$\{N/2, \ldots, 3N/2\} \subseteq A + A$.*

Übung 2.5 *Für eine endliche Gruppe Z ist die Davenport-Konstante $\mathrm{s}(Z)$ die kleinste Zahl $s \in \mathbb{N}$, so dass für jede Folge $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $a_i \in Z$ mit $m \geq s$ gilt: Es gibt eine Teilfolge A' von Elementen aus A mit $\sum_{a' \in A'} a' = 0$. Man zeige: $\mathrm{s}(Z) \leq |Z|$. Bemerkung: Eine sehr bekannte Vermutung besagt übrigens: $\mathrm{s}((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d) = d(m-1) + 1$ (warum nicht kleiner?) – just in case das Wetter ist schlecht.*

Übung 2.6 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ endlich und sei* $\dim A \geq d \geq 1$. *Man zeige:*

$$|A + A| \geq (d+1)\,|A| - \frac{d(d+1)}{2}.$$

Hinweis: Induktion über d, mit eingebauter Induktion über $|A|$ und ein wenig Geometrie...

Übung 2.7 *Sei Z endliche abelsche Gruppe, und sei $e : Z \times Z \to S^1$ ein Bi-Charakter. Seien $f, g \in \mathbb{C}^Z$. Man zeige:*

i) $f(x) = \sum_{y \in Z} \widehat{f}(y)\, e(x, y)$ (Fourier Umkehr Formel)

ii) $\frac{1}{|Z|} \sum_{x \in Z} f(x)\overline{g(x)} = \sum_{y \in Z} \widehat{f}(y)\, \overline{\widehat{g}(y)}$ (Plancherel Formel)

iii) $\frac{1}{|Z|} \sum_{x \in Z} |f(x)|^2 = \sum_{y \in Z} |\widehat{f}(y)|^2$ (Parsevalsche Identität)

Besprechung der Übung am 31.05.2012

Übung 1

Übung 1.1 *Man charakterisiere alle endlichen Teilmengen* $A, B \subset \mathbb{Z}$, $|A|, |B| \geq 2$, *mit* $|A + B| = |A| + |B| - 1$.

Übung 1.2 *Seien* $A, B \subseteq G$ *endlich,* G *abelsch, und* $\Phi : A \cup B \to \Phi(A \cup B)$ *ein Freiman Isomorphismus der Ordnung* 2*). Man zeige* $|A+B| = |\Phi(A)+\Phi(B)|$*. Was gilt für Freiman Isomorphismen einer Ordnung* $k > 2$*?.*

Übung 1.3 *Seien* $A, B \subseteq G$ *endlich,* G *abelsch. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $|A + B| = A$,

ii) $|A - B| = A$,

iii) *Es gibt eine Untergruppe* $U \leq G$*, so dass* B *Teilmenge einer Nebenklasse bzgl.* U *ist, und* A *ist die Vereinigung von Nebenklassen bzgl.* U*.*

iv) $|A + mB - nB| = A$ *für ein* $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

v) $|A + mB - nB| = A$ *für alle* $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Übung 1.4 *Seien* $A, B \subseteq G$ *endlich,* G *abelsch und endlich. Man zeige, dass es en* $x \in G$ *gibt mit*

$$|A \cap (x + B)| \geq \frac{|A||B|}{|G|}.$$

Besprechung der Übung am 19.04.2012