Mathematik II kompakt

Sommersemester 2014

1. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen, Ringe, Körper

Definition 1.1 (Gruppe)**.** Sei G eine nichtleere Menge, und sei $\otimes : G \times G \to G$ mit $(x, y) \mapsto x \otimes y$ eine Abbildung (Verknüpfung).

$(G, \otimes)$ heißt *Gruppe*, wenn die folgenden Bedingungen 1.–3. erfüllt sind:

1. Für alle $x, y, z \in G$ gilt: $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ (Assoziativgesetz).
2. Es gibt ein *neutrales* Element $e \in G$, so dass für alle $x \in G$ gilt: $e \otimes x = x \otimes e = x$.
3. Zu jedem $x \in G$ gibt es ein *inverses Element* $x' \in G$, so dass $x \otimes x' = x' \otimes x = e$. x' wird auch mit x^{-1} bezeichnet.

- Gilt zusätzlich $x \otimes y = y \otimes x$ für alle $x, y \in G$, dann heißt $(G, \otimes)$ *kommutative (abelsche[1]) Gruppe.*

Definition 1.2 (Untergruppe)**.** Sei $(G, \otimes)$ Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G, falls U mit der Verknüpfung $\otimes$ die Gruppeneigenschaften erfüllt. $(U, \otimes)$ ist also selbst wieder eine Gruppe. In diesem Falle schreibt man $(U, \otimes) \leq (G, \otimes)$, bzw. nur $U \leq G$.

Satz 1.3 (Untergruppenkriterium)**.** *Sei $(G, \otimes)$ Gruppe und $U \subseteq G$. U ist genau dann Untergruppe von G, falls $U \neq \emptyset$ und $x \otimes y^{-1} \in U$ für alle $x, y \in U$.*

Notation 1.4.

i) Sei $(G, \otimes)$ Gruppe mit neutralem Element e, und sei $x \in G$. Für $k \in \mathbb{Z}$ versteht man unter

$$x^k = \begin{cases} \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{k-\text{mal}} & : k \geq 1, \\ e & : k = 0, \\ \underbrace{x^{-1} \otimes x^{-1} \otimes \cdots \otimes x^{-1}}_{k-\text{mal}} & : k \leq -1. \end{cases}$$

ii) Für $x \in G$ sei

$$< x >= \{x^k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definition 1.5 (Zyklische Gruppe)**.** Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, falls ein $x \in G$ existiert mit $G =< x >$, d.h. es gibt ein Element $x \in G$, welches die Gruppe erzeugt.

Definition 1.6 (Ordnung einer Gruppe / eines Elements)**.** Sei $(G, \otimes)$ eine Gruppe. Die Anzahl der Elemente von G, bezeichnet mit $|G|$, heißt die *Ordnung der Gruppe* (unendlich möglich). Für $x \in G$ heißt $| < x > |$ die *Ordnung von x*.

Bemerkung 1.7. *Sei $(G, \otimes)$ Gruppe mit neutralem Element e_G. Sei $|G|$ endlich und sei $x \in G$. Dann ist*

$$| < x > | = \min\{n \in \mathbb{N} : x^n = e_G\}.$$

Definition 1.8 (Nebenklassen)**.** Sei $(G, \otimes)$ Gruppe, und sei $U \leq G$ Untergruppe von G. Die Relation R auf G mit

$$xRy \Leftrightarrow x^{-1} \otimes y \in U \quad (\Leftrightarrow y \in x \otimes U)$$

ist eine Äquivalenzrelation. Hierbei ist $x \otimes U = \{x \otimes u : u \in U\}$. Die durch diese Äquivalenzrelation definierten Äquivalenzklassen $[x]_R = x \otimes U$ heißen (Links-)*Nebenklassen* von U bzgl. G.

[1] Niels Abel, 1802–1829

Definition 1.9 (Index einer Untergruppe)**.** Sei $(G, \otimes)$ Gruppe, und sei $U \leq G$ Untergruppe von G. Die Anzahl der Nebenklassen von U bzgl. G heißt *Index von U in G* und wird mit $|G : U|$ bezeichnet.

Satz 1.10 (Lagrange[2])**.** *Sei G endliche Gruppe, und sei $U \leq G$ Untergruppe von G. Dann ist*

$$|G| = |U| \cdot |G : U|.$$

Insbesondere ist die Ordnung einer Untergruppe Teiler der Gruppenordnung.

Satz 1.11 (Euler[3])**.** *Sei G endliche Gruppe, und sei $x \in G$. Dann ist $| < x > |$ ein Teiler von $|G|$.*

Korollar 1.12. *Sei G endliche Gruppe mit neutralem Element e, und sei $x \in G$. Dann ist $x^{|G|} = e$.*

Satz 1.13 (Chinesischer Restsatz)**.** *Seien $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m_i, m_j) = 1$ für $1 \leq i \neq j \leq n$, und seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit*

$$x \equiv a_i \bmod m_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

x ist modulo $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung 1.14 (Bestimmen einer Lösung)**.**

- *Für $k = 1, \ldots, n$ sei $M_k = m/m_k$.*
- *Dann ist $\mathrm{ggT}(M_k, m_k) = 1$ und es gibt ein $N_k \in \mathbb{Z}$ mit $N_k \cdot M_k \equiv 1 \bmod m_k$.*
- *Sei $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\, M_i\, N_i$.*

Definition 1.15 (Polynomring)**.** Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, und seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$. Die Abbildung $f : R \to R$ mit $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ heißt *Polynomfunktion* oder kurz *Polynom*. a_i heißen die Koeffizienten des Polynoms.

Der größte Index i mit $a_i \neq 0$ heißt der *Grad* von f und wird mit $\mathrm{grad}(f)$ bezeichnet. Ist $a_{\mathrm{grad}(f)} = 1$, dann heisst f *normiert*.

Die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus R wird mit $R[x]$ bezeichnet. Mit den Verknüpfungen

$$(p \oplus q)(x) = p(x) + q(x) \text{ und } (p \odot q)(x) = p(x) \cdot q(x),$$

$p, q \in R[x]$ ist $(R[x], \oplus, \odot)$ (oder auch nur $R[x]$) ein Ring und heißt *Polynomring*. Statt $\oplus, \odot$ schreibt man oft auch nur $+, \cdot$.

Bemerkung 1.16. *Sei $(R, +, \cdot)$ Ring. Ist $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe, dann heißt $(R, +, \cdot)$ Körper. Jeder Körper ist also ein Ring, aber nicht umgekehrt.*

Satz 1.17 (Polynomdivision)**.** *Sei $\mathbb{K}$ Körper und $\mathbb{K}[x]$ der zugehörige Polynomring. Für $f, g \in \mathbb{K}[x]$, $\mathrm{grad}(g) \geq 1$, gibt es $q, r \in \mathbb{K}[x]$ mit*

$$f = q \cdot g + r \text{ und } \mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g).$$

Man schreibt auch $r = f \bmod g$.

Definition 1.18 (ggT von Polynomen)**.** Sei $\mathbb{K}$ Körper und $\mathbb{K}[x]$ der zugehörige Polynomring. $g \in \mathbb{K}[x]$ heisst Teiler von $f \in \mathbb{K}[x]$, falls es ein $q \in \mathbb{K}[x]$ gibt mit $f = q \cdot g$, also $f \bmod g = 0$.

Seien $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x]$. Das *normierte* Polynom mit maximalem Grad, das Teiler von f_1 und f_2 ist, heisst *größter gemeinsamer Teiler* von f_1 und f_2, und wird mit $\mathrm{ggT}(f_1, f_2)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.19. *Analog zum Euklidischen Algorithmus für Zahlen lässt sich auch der ggT von Polynomen f_1, f_2 bestimmen, bzw. eine Darstellung des ggT's mittels der Polynome f_1, f_2.*

Satz 1.20. *Sei $\mathbb{K}$ Körper und $\mathbb{K}[x]$ der zugehörige Polynomring. Sei $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, und sei $a \in \mathbb{K}$. $f(x)$ lässt sich genau dann durch den Linearfaktor $x - a \in \mathbb{K}[x]$ teilen, d.h., $f(x) = q(x) \cdot (x - a)$ für ein $q(x) \in \mathbb{K}[x]$, falls a Nullstelle von $f(x)$ ist, d.h., $f(a) = 0$.*

[2] Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813
[3] Leonhard Euler, 1707–1783

2 Folgen und Reihen

Definition 2.1 (Folgen)**.** Eine (reelle) *Folge* ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, auch geschrieben als $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Die reellen Zahlen a_n heißen die *Glieder* der Folge. Die Folge wird auch mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnet.

Definition 2.2 (Monotone/beschränkte Folgen)**.**

i) Eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *monton steigend* (bzw. *monoton fallend*) falls $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

ii) Eine (reelle) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt nach *oben beschränkt*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Entsprechend heißt eine Folge nach *unten beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

iii) Eine (reelle) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, d.h. wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 2.3 (Konvergenz von Folgen)**.** Eine rellee Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *konvergent* gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn es für jede (noch so kleine) positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ einen Folgenindex n_0 gibt, so dass alle Folgenglieder mit $n \geq n_0$ in dem Interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ liegen, d.h.

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

a heißt der *Grenzwert* der Folge, und man sagt „Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen a“ .

Bemerkung 2.4.

i) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen eine Zahl a genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ nur* endlich viele *Folgenglieder* außerhalb *von $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ liegen.*

ii) *Der Index n_0 hängt i. A. immer von ϵ ab; je kleiner ϵ desto größer n_0.*

Definition 2.5 (Teilfolge)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und sei $M \subset \mathbb{N}_0$ mit $|M| = \infty$. Dann heißt die Folge $(a_n)_{n\in M}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sie besteht also aus allen Folgenglieder a_n, deren Index in M liegt.

Satz 2.6.

i) *Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt. Konvergiert eine Folge, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen den Grenzwert.*

ii) *Jede konvergente Folge ist beschränkt, bzw. jede unbeschränkte Folge ist nicht konvergent.*

Satz 2.7 (Rechenregeln für konvergente Folge)**.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a, b, und sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann sind auch die Folgen $(\alpha\, a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}_0, b_n\neq 0}$ (falls $b \neq 0$) konvergent mit den Grenzwerten:*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, a, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Satz 2.8. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *die* rationale Folge

$$a_n = \frac{\alpha_k\, n^k + \alpha_{k-1}\, n^{k-1} + \cdots + \alpha_1\, n + \alpha_0}{\beta_m\, n^m + \beta_{m-1}\, n^{m-1} + \cdots + \beta_1\, n + \beta_0},$$

wobei $k, m \in \mathbb{N}_0$ *und* $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ *mit* $\alpha_k \neq 0$*,* $\beta_m \neq 0$*. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{für } k < m, \\ a_k/b_m, & \text{für } k = m, \\ \infty, & \text{für } k > m \text{ und } a_k/b_m > 0, \\ -\infty, & \text{für } k > m \text{ und } a_k/b_m < 0. \end{cases}$$

Satz 2.9. *Jede beschränkte und monoton wachsende (oder fallende) Folge konvergiert.*

Bemerkung 2.10. *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *heißt* Nullfolge . *Für* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $|q| < 1$ *ist* $a_n = q^n$ *eine Nullfolge.*

Definition 2.11 (Reihe, Partialsummen)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Man nennt den (formalen) Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

eine *(unendliche) Reihe*. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit den Folgegliedern

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

heißt *Folge der Partialsummen* (oder auch *Teilsummen*) der Reihe.

Definition 2.12 (Konvergenz von Reihen)**.** Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge ihrer Partialsummen. Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit Grenzwert s, dann heißt die Reihe konvergent mit Grenzwert s, und man schreibt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Andernfalls heißt die Reihe *divergent*.

Konvergiert (sogar) die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$, dann heißt die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *absolut konvergent.*

Satz 2.13. *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Reihe, dann ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Nullfolge, d.h.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, siehe z.B. harmonische Reihe.*

Satz 2.14 (Geometrische Reihe)**.** *Sei* $q \in \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*. Eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

heißt geometrische Reihe*, wobei der Index* k *nicht unbedingt bei* 0 *beginnen muss. Sei* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *die Folge ihrer Partialsummen. Dann gilt für* $q \neq 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Die geometrische Reihe ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$*, und in diesem Fall ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Satz 2.15 (Rechenregeln für konvergente Reihen). *Seien* $\sum_{k=0}^\infty a_k$, $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *konvergente Reihen, und sei* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Dann sind auch die Reihen* $\sum_{k=0}^\infty (\alpha\, a_k)$ *und* $\sum_{k=0}^\infty (a_k \pm b_k)$ *konvergent, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^\infty (\alpha\, a_k) = \alpha \sum_{k=0}^\infty a_k,$$
$$\sum_{k=0}^\infty (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^\infty a_k \pm \sum_{k=0}^\infty b_k.$$

Definition 2.16. Sei $\sum_{k=0}^\infty a_k$ eine Reihe. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty |a_k|$ konvergent, dann heißt $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *absolut konvergent.*

Bemerkung 2.17. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Bemerkung 2.18. *Seien* $\sum_{k=0}^\infty a_k$, $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *absolut konvergente Reihen. Dann ist auch ihr* Cauchy-Produkt

$$\sum_{k=0}^\infty c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^k a_i\, b_{k-i}$$

(absolut) konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=0}^\infty c_k = \left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right)\left(\sum_{k=0}^\infty b_k\right).$$

Definition 2.19 (Alternierende Reihe). Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine alternierende Folge, d.h. die Folgenglieder sind abwechselnd nicht-negativ und nicht-positiv, dann heißt $\sum_{k=0}^\infty a_k$ einen *alternierende Reihe.*

Satz 2.20 (Konvergenzkriterium von Leibniz[4]). *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *eine monoton fallende Nullfolge nicht-negativer Zahlen. Dann konvergiert die alternierende Reihe*

$$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\, a_k.$$

Satz 2.21 (Majorantenkriterium). *Sei* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *eine Reihe.*

i) *Wenn es eine konvergente Reihe* $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *und eine* $k_0 \in \mathbb{N}_0$ *gibt mit*

$$|a_k| \le b_k \text{ für alle } k \ge k_0,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *(absolut) konvergent.* $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *heißt* Majorante *für* $\sum_{k=0}^\infty a_k$.

ii) *Wenn es eine divergente Reihe* $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *und eine* $k_0 \in \mathbb{N}_0$ *gibt mit*

$$|a_k| \ge b_k \ge 0 \text{ für alle } k \ge k_0,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *divergent. Man nennt dann die Reihe* $\sum_{k=0}^\infty b_k$ *eine (divergente)* Minorante *für* $\sum_{k=0}^\infty a_k$.

Satz 2.22 (Quotientenkriterium). *Sei* $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *eine Reihe.*

i) *Wenn es eine Zahl* $q < 1$ *und ein* $k_0 \in \mathbb{N}_0$ *gibt, so dass*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q \text{ für alle } k \ge k_0,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$ *(absolut) konvergent.*

[4] Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz, 1646-1716

ii) *Wenn es ein* $k_0 \in \mathbb{N}_0$ *gibt, so dass*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \text{ für alle } k \geq k_0,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *divergent.*

3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Definition 3.1 ((Strenge) Montonie von Funktionen)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) f heißt *streng monoton wachsend*, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x > y$.

ii) f heißt *streng monoton fallend*, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x > y$.

iii) Gilt „lediglich“$f(x) \geq f(y)$, bzw. $f(x) \leq f(y)$, dann heißt die Funktion „nur“ *monoton wachsend*, bzw. *monoton fallend*.

Definition 3.2 (Beschränktheit von Funktionen)**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $M > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in D$.

Definition 3.3 (Rationale Funktionen)**.** Seien $p, q \in \mathbb{R}[x]$ Polynome. Dann heißt die Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$ *rationale Funktion*. Sie ist überall dort definiert, wo das Nennerpolynom $q(x) \neq 0$ ist.

Definition 3.4 (Exponentialfunktion)**.** Sei $a > 0$. Eine Funktion der Form $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ heißt *Exponentialfunktion zur Basis* a. Ist die Basis die *Eulersche Zahl* $\mathrm{e} = 2,7182818284...$, dann heißt die Funktion einfach *Exponentialfunktion* (oder auch e-*Funktion*).

Definition 3.5 (Logarithmusfunktion)**.** Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, heißt *Logarithmusfunktion zur Basis* a, und wird mit

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x),$$

bezeichnet. Ist die Basis e, dann spricht man von dem *natürlichen Logarithmus*, der mit $\ln(x)$ bezeichnet wird.

Definition 3.6 ((Un)gerade Funktionen)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) f heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x, -x \in D$.

ii) f heißt *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x, -x \in D$.

Definition 3.7 (Periodische Funktionen)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *periodisch* mit Periode $p > 0$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(p + x) = f(x).$$

Beispiel 3.8. $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind periodische Funktionen mit Periode 2π. Desweiteren ist sin ungerade, und cos ist eine gerade Funktion.

Definition 3.9 (Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x^\star \in \mathbb{R}$. Wenn es ein $y^\star \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_n \in D \setminus \{x^\star\}$ und

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^\star$$

gilt, dass die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen $y^\star$ konvergiert, also

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y^\star,$$

dann heißt $y^\star$ *der Grenzwert von f für x gegen $x^\star$*. Man schreibt dafür

$$\lim_{x \to x^\star} f(x) = y^\star.$$

Hierbei ist auch $y^\star = \pm\infty$ erlaubt und man spricht dann von bestimmter Divergenz.

Definition 3.10 (Rechts-Linksseitiger Grenzwert)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x^\star \in \mathbb{R}$. Wenn es ein $y^\star \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_n \in D \setminus \{x^\star\}$, $x_n > x^\star$ (!), und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^\star$$

gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y^\star,$$

dann heißt $y^\star$ *der rechtsseitige Grenzwert von f für x gegen $x^\star$*. Man schreibt dafür

$$\lim_{x\to x^\star+} f(x) = y^\star.$$

Analog definiert man den *linkssseitigen Grenzwert von f für x gegen $x^\star$*, indem man nur Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_n \in D \setminus \{x^\star\}$, $x_n < x^\star$ (!), und $\lim_{n\to\infty} x_n = x^\star$ betrachet. In diesem Falle schreibt man

$$\lim_{x\to x^\star-} f(x) = y^\star.$$

Bemerkung 3.11. *Es gilt*

$$\lim_{x\to x^\star} f(x) = y^\star \Leftrightarrow \lim_{x\to x^\star+} f(x) = \lim_{x\to x^\star-} f(x) = y^\star.$$

Satz 3.12 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.** *Seien f, g Funktionen mit $\lim\limits_{x\to x^\star} f(x) = \hat{y}$ und $\lim\limits_{x\to x^\star} g(x) = \tilde{y}$. Dann gilt*

i) $\lim\limits_{x\to x^\star} \alpha\, f(x) = \alpha\, \hat{y}$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{x\to x^\star} (f(x) \pm g(x)) = \hat{y} \pm \tilde{y}$.

iii) $\lim\limits_{x\to x^\star} (f(x) \cdot g(x)) = \hat{y} \cdot \tilde{y}$.

iv) $\lim\limits_{x\to x^\star} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{y}}{\tilde{y}}$ *falls* $\tilde{y} \neq 0$.

Definition 3.13 (Asymptotisches Verhalten)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter dem *asymptotischen Verhalten von f für $x \to \infty$* versteht man den Grenzwert (falls existent und $\pm\infty$ sind zugelassen)

$$\lim_{x\to\infty} f(x).$$

Analog definiert man das *asymptotischen Verhalten von f für $x \to -\infty$* als

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Definition 3.14 (Stetigkeit)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x^\star \in D$. f heißt *stetig im Punkt* x^*, falls

$$\lim_{x\to x^\star} f(x) = f(x^*),$$

d.h. der Grenzwert $\lim_{x\to x^\star} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x^\star)$. Dies bedeutet, für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_n \in D \setminus \{x^\star\}$, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^\star$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^\star).$$

Ist die Funktion f in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches D stetig, dann heißt f *stetig*.

Satz 3.15. *Seien $f(x), g(x)$ Funktionen, die in $x^\star$ stetig sind. Dann sind auch die Funktionen*

$$\begin{aligned} &\alpha f(x) \ \textit{mit}\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \\ &\frac{f(x)}{g(x)},\ \textit{falls}\ g(x^\star) \neq 0, \end{aligned}$$

stetig in $x^\star$. Ist die Verknüpfung $f(g(x))$ der beiden Funktionen definiert, dann ist auch $f(g(x))$ stetig in $x^\star$.

Satz 3.16 (Weierstraß[5])**.** *Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt auf diesem Intervall ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $\tilde{x}, \hat{x} \in [a, b]$ mit*

$$f(\tilde{x}) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\} \ \textit{und}\ f(\hat{x}) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

[5] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß 1815 - 1897

4 Differenzierbarkeit I

Definition 4.1 (Differenzierbarkeit)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x^\star \in D$. f heißt *differenzierbar* in $x^\star$, wenn der Grenzwert (der Sekantensteigungen)

$$\lim_{x \to x^\star} \frac{f(x) - f(x^\star)}{x - x^\star}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert mit $f'(x^\star)$ oder auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^\star)$ bezeichnet, und heißt *Ableitung von f in $x^\star$*. Ist f in jedem Punkt $x^\star \in D$ differenzierbar, dann heißt f *differenzierbar*, und die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto f'(x)$$

heißt *Ableitung von f*. Für $f'(x)$ schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ bzw. einfach $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Ist f' eine stetige Funktion, dann heißt f *stetig differenzierbar*.

Bemerkung 4.2. *Ist f in $x^\star$ differenzierbar, dann ist*

$$t(x) = f(x^\star) + f'(x^\star)\,(x - x^\star), \quad x \in \mathbb{R},$$

die Gleichung der Tangente durch $(x^\star, f(x^\star))$.

Satz 4.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x^\star \in D$ differenzierbar sind. Dann sind auch $\alpha\, f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ in $x^\star$ differenzierbar, und es gilt:*

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad (\alpha\, f)'(x^\star) = \alpha\, f'(x^\star), \quad \text{ii)} \quad (f \pm g)'(x^\star) = f'(x^\star) \pm g'(x^\star), \\ &\text{iii)} \quad (f \cdot g)'(x^\star) = f'(x^\star) \cdot g(x^\star) + f(x^\star) \cdot g'(x^\star). \quad \text{(Produktregel)} \end{aligned}$$

Ist $g(x^\star) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in $x^\star$ differenzierbar mit

$$\text{iv)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x^\star) = \frac{f'(x^\star) \cdot g(x^\star) - f(x^\star) \cdot g'(x^\star)}{g(x^\star)^2}. \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Ist die Verknüpfung $f \circ g$ definiert, und ist f in $g(x^\star)$ diffbar, dann ist $f \circ g$ in $x^\star$ differenzierbar mit

$$\text{v)} \quad (f \circ g)'(x^\star) = f'(g(x^\star)) \cdot g'(x^\star). \quad \text{(Kettenregel)}$$

Satz 4.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion, und sei $\tilde{D} = f(D)$. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$. Ist f in $x^\star$ differenzierbar mit $f'(x^\star) \neq 0$, so ist f^{-1} in $y^\star = f(x^\star)$ differenzierbar, und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y^\star) = \frac{1}{f'(x^\star)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y^\star))}$$

Satz 4.5 (Regel von de l'Hospital[6])**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $x^\star \in D$ ($\pm\infty$ zugelassen). Gilt*

$$\lim_{x \to x^\star} f(x) = \lim_{x \to x^\star} g(x) = 0,$$

oder

$$\lim_{x \to x^\star} |f(x)| = \lim_{x \to x^\star} |g(x)| = \infty,$$

und existiert $\lim_{x \to x^\star} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *($\pm\infty$ zugelassen), dann gilt*

$$\lim_{x \to x^\star} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x^\star} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[6] Guillaume de l'Hospital, 1661-1704

Definition 4.6 (Höhere Ableitungen)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x^\star \in D$ differenzierbar, dann heißt

$$(f')'(x^\star)$$

die *zweite* Ableitung von f in $x^\star$ und wird mit $f''(x^\star)$ bezeichnet.

Analog definiert man rekursiv die 3-te, 4-te usw. Ableitung in $x^\star$. Allgemein wird n-te Ableitung von f in $x^\star$ mit $f^{(n)}(x^\star)$ bezeichnet. Die Funktion selbst wird auch als 0-te Ableitung $f^{(0)}$ bezeichnet. Eine andere Bezeichung für die n-Ableitung ist $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Definition 4.7 (Konvexe/konkave Funktionen)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

i) *konvex* in einem Intervall $[a, b] \subseteq D$, falls für alle $x_0, x_1 \in [a, b]$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f((1-\lambda)\, x_0 + \lambda\, x_1) \leq (1-\lambda)\, f(x_0) + \lambda\, f(x_1),$$

d.h. die Sekante, die $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ verbindet, liegt in diesem Bereich oberhalb des Funktionsgraphen.

ii) *konkav* in einem Intervall $[a, b] \subseteq D$, falls für alle $x_0, x_1 \in [a, b]$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f((1-\lambda)\, x_0 + \lambda\, x_1) \geq (1-\lambda)\, f(x_0) + \lambda\, f(x_1),$$

d.h. die Sekante, die $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ verbindet, liegt in diesem Bereich unterhalb des Funktionsgraphen.

Satz 4.8. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ in $[a, b] \subseteq D$ zweimal differenzierbar. Dann gilt*

i) *f ist konvex in $[a, b]$ genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, d.h. die erste Ableitung ist monoton steigend.*

ii) *f ist konkav in $[a, b]$ genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, d.h. die erste Ableitung ist monoton fallend.*

Definition 4.9 (lokale/globale Extrema)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $x^\star \in D$ heißt

i) *lokales (relatives) Maximum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x) \leq f(x^\star) \text{ für alle } x \in (x^\star - \epsilon, x^\star + \epsilon) \cap D.$$

ii) *lokales (relatives) Minimum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x) \geq f(x^\star) \text{ für alle } x \in (x^\star - \epsilon, x^\star + \epsilon) \cap D.$$

iii) *globales Maximum*, falls

$$f(x) \leq f(x^\star) \text{ für alle } x \in D.$$

iv) *globales Minimum*, falls

$$f(x) \geq f(x^\star) \text{ für alle } x \in D.$$

v) Lokale/globale Minima oder Maxima werden als lokale/globale Extrema bzw. Extremwerte der Funktion bezeichnet.

Satz 4.10 (Kriterium für lokale Extrema)**.**

i) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $x^\star \in (a, b)$. Ist $x^\star$ ein lokales Minimum oder Maximum, dann gilt $f'(x^\star) = 0$.*

ii) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, und sei $x^\star \in (a,b)$.*

   a) *Ist $f'(x^\star) = 0$ und $f''(x^\star) < 0$, dann ist $x^\star$ ein lokales Maximum.*

   b) *Ist $f'(x^\star) = 0$ und $f''(x^\star) > 0$, dann ist $x^\star$ ein lokales Minimum.*

Satz 4.11. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, und sei $x^\star \in (a,b)$. Sei $f'(x^\star) = 0$ und $f^{(n)}(x^\star)$ die erste Ableitung, die an der Stelle $x^\star$ nicht gleich 0 ist, d.h., $f^{(i)}(x^\star) = 0$, $1 \le i \le n-1$ und $f^{(n)}(x^\star) \neq 0$.*

Ist n gerade und

i) *$f^{(n)}(x^\star) < 0$, dann ist $x^\star$ ein lokales Maximum.*

ii) *$f^{(n)}(x^\star) > 0$, dann ist $x^\star$ ein lokales Minimum.*

Definition 4.12 (Wendepunkte, Sattelpunkte)**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $x^\star \in (a,b)$ heißt *Wendepunkt*, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass f in $[x^\star - \epsilon, x^\star]$ konkav und in $[x^\star, x^\star + \epsilon]$ konvex ist (oder umgekehrt).

Ist f in $x^\star$ differenzierbar, und gilt zudem $f'(x^\star) = 0$, dann wird der Wendepunkt auch *Sattelpunkt* genannt.

Satz 4.13 (Kriterium für Wendepunkte)**.**

i) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, und sei $x^\star \in (a,b)$. Ist $x^\star$ ein Wendepunkt, dann gilt $f''(x^\star) = 0$.*

ii) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar, und sei $x^\star \in (a,b)$. Ist $f''(x^\star) = 0$ und $f'''(x^\star) \neq 0$, dann ist $x^\star$ ein Wendepunkt.*

Satz 4.14. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, und sei $x^\star \in (a,b)$. Sei $f'(x^\star) = 0$ und $f^{(n)}(x^\star)$ die erste Ableitung, die an der Stelle $x^\star$ nicht gleich 0 ist, d.h., $f^{(i)}(x^\star) = 0$, $1 \le i \le n-1$ und $f^{(n)}(x^\star) \neq 0$.*

Ist n ungerade, dann ist $x^\star$ ein Sattelpunkt.

Bemerkung 4.15. *Maxima und Minima am Rand eines Intervalls können i.A. nicht mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmt werden.*

Bemerkung 4.16. *Um alle Maxima und Minima einer Funktion zu bestimmen, müssen die Randpunkte und alle Punkte, in denen die Funktion nicht differenzierbar ist, gesondert untersucht werden.*

Satz 4.17. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant.*

Satz 4.18. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und für eine Konstante c gelte $f'(x) = c\, f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(x) = f(0)\mathrm{e}^{c\,x}$.*

5 Taylor- und Potenzreihen

Definition 5.1 (Taylorpolynom[7])**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $x^\star \in D$ mindestens n-mal differenzierbar ist. Dann heißt

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x^\star)}{k!} (x - x^\star)^k \\ &= f(x^\star) + f'(x^\star)(x - x^\star) + \frac{f''(x^\star)}{2}(x - x^\star)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x^\star)}{n!}(x - x^\star)^n \end{aligned}$$

das zu f gehörige *Taylorpolynom vom Grad* n an der Stelle $x^\star$, bzw. mit *Entwicklungspunkt* $x^\star$. Man schreibt daher auch manchmal $T_n(x^\star; x)$.

Bemerkung 5.2. *$T_1(x)$ ist gerade die Tangente an der Stelle $x^\star$ (siehe 4.2).*

Definition 5.3 (Restglied)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $x^\star \in D$ mindestens n-mal differenzierbar ist. Der „Fehler“

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x^\star; x)$$

heißt *Restglied*.

Satz 5.4 (Taylor)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt:*

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x^\star; x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x^\star|^{n+1},$$

wobei M so gewählt ist, dass $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ für alle $x \in D$.

Definition 5.5 (Landausymbole[8])**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, und sei $x^\star \in D$.

i) f heißt *von Ordnung groß O von g für x gegen $x^\star$* falls es Konstanten $M > 0$, $\delta > 0$ gibt, so dass für $x \in (x^\star - \delta, x^\star + \delta)$ gilt

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M.$$

Man schreibt dann $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \to x^\star$. In diesem Fall wächst f höchstens so schnell wie g. Die Bedingung ist sicherlich erfüllt, falls $\lim_{x\to x^\star} |\frac{f(x)}{g(x)}| \leq M$ gilt. Ist $x^\star = \pm\infty$, dann schreibt man $f = \mathcal{O}(g)$ für $x \to x^\star$ falls

$$\lim_{x\to x^\star} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M.$$

ii) f heißt *von Ordnung klein o von g für x gegen $x^\star$* falls

$$\lim_{x\to x^\star} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0.$$

Man schreibt dann $f = o(g)$ für $x \to x^\star$. In diesem Fall wächst f (echt) langsamer als g.

[7] Brook Taylor, 1685-1731
[8] Edmund Georg Hermann Landau, 1877-1938

Bemerkung 5.6. *Mit dieser Notation ist also für x gegen $x^\star$*

$$f(x) = T_n(x^\star; x) + \mathcal{O}((x - x^\star)^{n+1}).$$

Definition 5.7 (Taylorreihe)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Sei $x^\star \in D$. Die Reihe

$$T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x^\star)}{k!} (x - x^\star)^k$$

heißt *Taylorreihe* mit Entwicklungspunkt $x^\star$. Man schreibt auch manchmal $T_\infty(x^\star; x)$.

Definition 5.8 (Potenzreihen)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller (bzw. komplexer) Zahlen und $x^\star \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \mathbb{C}$). Für $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \mathbb{C}$) heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x^\star)^k$$

Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x^\star$.

Lemma 5.9. *Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x^\star)^k$ für ein $x_1 \in \mathbb{R}$, dann konvergiert sie (absolut) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$|x - x^\star| < |x_1 - x^\star|.$$

Definition 5.10 (Supremum/Infimum)**.** Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Element $u \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke* von A, falls $a \leq u$ für alle $a \in A$. Ein Element $l \in \mathbb{R}$ heißt *untere Schranke* von A, falls $l \leq a$ für alle $a \in A$.

i) $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum von A* im Zeichen $s = \sup A$, falls s die kleinste obere Schranke von A ist.

ii) $r \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum von A* im Zeichen $r = \inf A$, falls r die größte untere Schranke von A ist.

iii) Falls keine oberen (unteren) Schranken existieren, dann setzt man $\sup A = \infty$ ($\inf A = -\infty$).

iv) Ist $s = \sup A < \infty$ und $s \in A$, dann heißt s *maximales Element* (*Maximum*) von A, und man schreibt $s = \max A$.

v) Ist $r = \inf A > -\infty$ und $r \in A$, dann heißt r *minimales Element* (*Minimum*) von A, und man schreibt $r = \min A$.

Definition 5.11 (Konvergenzbereich, -radius)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, $x^\star \in \mathbb{R}$, und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x^\star)^k$ die zugehörige Potenzreihe.

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x^\star)^k \text{ konvergiert } \}$$

heißt *Konvergenzbereich* der Potenzreihe, und

$$\rho = \sup\{|x - x^\star| : x \in C\}$$

heißt der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Satz 5.12. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x^\star)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann ist die Reihe*

i) *absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x^\star| < \rho$, und*

ii) *divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x^\star| > \rho$.*

Satz 5.13. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x^\star)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* ρ*, und es sei* $a_k \neq 0$ *für fast alle* $k \in \mathbb{N}_0$*. Existiert der Grenzwert* $\lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+1}|$ *(*∞ *zugelassen), dann ist*

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Satz 5.14. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x^\star)^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* ρ*. Existiert der Grenzwert* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ *(*∞ *zugelassen), dann gilt*

$$\rho = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Ist der Grenzwert 0*, dann ist* $\rho = \infty$*, und ist der Grenzwert* ∞ *(also bestimmte Divergenz), dann ist* $\rho = 0$*.*

Satz 5.15. *Eine Potenzreihe* $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x^\star)^k$ *ist innerhalb ihres Konvergenzbereiches beliebig oft stetig differenzierbar. Die Ableitungen können durch* gliedweises Differenzieren *erhalten werden, d.h.*

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x^\star)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,a_{k+1}\,(x-x^\star)^k,$$

und der Konvergenzbereich von $g'(x)$ *ist gleich dem Konvergenzbereich von* $g(x)$*.*

6 Integralrechnung I

Satz 6.1. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a,b]$, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

i) *αf und $f+g$ sind integrierbar, und es ist:*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f \text{ und } \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

ii) *$f \cdot g$ ist integrierbar.*

Bemerkung 6.2. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar über $[a,b]$. Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann ist*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Insbesondere ist im Falle $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, auch $\int_a^b f \geq 0$.

Lemma 6.3. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, und sei $c \in [a,b]$. Dann ist f über $[a,b]$ integrierbar, genau dann wenn f sowohl über $[a,c]$ als auch über $[c,b]$ integrierbar ist, und es gilt dann:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Definition 6.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann setzen wir

$$\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ und } \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

für $a \leq c \leq d \leq b$.

Definition 6.5 (Stammfunktion)**.** Seien $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktion. Ist F differenzierbar mit $F' = f$, dann heißt F Stammfunktion von f.

Satz 6.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist Stammfunktion von f.

Lemma 6.7. *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann eine (weitere) Stammfunktion von f, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $G(x) = F(x) + c$ für alle $x \in [a,b]$.*

Die Stammfunktion ist also nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Korollar 6.8. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Notation 6.9. Sei F Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann setzt man

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Definition 6.10 (Bestimmtes und Unbestimmtes Integral)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Eine Stammfunktion F von f heißt auch *unbestimmtes Integral* von f und wird mit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

(bzw. $\int f$) bezeichnet. Manchmal versteht man unter dem unbestimmten Integral auch die Menge aller Stammfunktionen, und schreibt (relativ unpräzise)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

wobei F eine Stammfunktion ist, und C deutet die Menge aller Konstanten an.

Hingegen nennt man das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit gegebenen Integrationsgrenzen a, b auch *bestimmtes Integral*.

Satz 6.11. *Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x^\star)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann ist auch die Funktion $F(x)$ die durch gliedweises Integrieren der Potenzreihe entsteht, d.h.*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\,(x - x^\star)^{k+1},$$

konvergent in $\{x \in \mathbb{R} : |x - x^\star| < \rho\}$, und $F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$.

Satz 6.12 (Substitutionsregel)**.** *Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Dann ist $F \circ g$ Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'(x)$ und es gilt*

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Hier wurde $y = g(x)$ substituiert, und mit der „informellen“ Schreibweise

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = g'(x) \text{ bzw. } \mathrm{d}y = g'(x)\mathrm{d}x$$

kann man sich auch (für das unbestimmte Integral) merken

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Satz 6.13 (Partielle Integration)**.** *Es sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion F. Dann ist $F \cdot g$ Stammfunktion von $f \cdot g + F \cdot g'$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = (F(x) \cdot g(x))\Big|_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bzw. man kann sich diese Regel auch merken als

$$\int u' \cdot v = (u \cdot v)\Big| - \int u \cdot v'.$$

Definition 6.14 (Uneigentliche Integrale)**.** Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $c \in (a, b)$. Weiterhin sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Ist f auf jedem Teilintervall $[c,d] \subset [c,b)$, also $c \leq d < b$, integrierbar und existiert der Grenzwert
$$\lim_{d \to b} \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$
so bezeichnet man ihn mit $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Ist f auf jedem Teilintervall $[d,c] \subset (a,c]$, also $a < d \leq c$, integrierbar und existiert der Grenzwert
$$\lim_{d \to a} \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
so bezeichnet man ihn mit $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Existieren die Grenzwerte
$$\lim_{d \to a} \int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x \text{ und } \lim_{d \to b} \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$
so setzt man
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Satz 6.15 (Konvergenzkriterium für Integrale)**.**

i) *Sei $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \geq 0$. Existiert das Integral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ und ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in (a,b)$, dann existiert auch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Man sagt, das g eine (konvergente) Majorante von f ist.*

ii) *Sei $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \geq 0$. Existiert das Integral $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ nicht und ist $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in (a,b)$, dann existiert auch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht. Man sagt, das g eine (divergente) Minorante von f ist.*

Satz 6.16 (Integralvergleichskriterium für Reihen)**.** *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negative monoton fallende Funktion. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.*

7 Fourierreihen

Definition 7.1 (Trigonometrisches Polynom)**.** Sei $T > 0$ und $\omega = 2\pi/T$. Eine Funktion $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\,\cos(k\,\omega\,x) + b_k\,\sin(k\,\omega\,x)\right)$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ heißt *trigonometrisches Polynom* vom Grad n.

Bemerkung 7.2. *T_n ist periodisch mit Periode T, d.h.*

$$T_n(x+T) = T_n(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es genügt daher solch ein Polynom auf dem Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (oder auch $[0,T]$) zu untersuchen.

Definition 7.3 (Fourierpolynom[9], Fourierkoeffizienten)**.** Sei $T > 0$ und $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, und sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 0,\ldots,n \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

heißen die *Fourierkoeffizienten* von f, und

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\,\cos(k\,\omega\,x) + b_k\,\sin(k\,\omega\,x)\right)$$

heißt das *Fourierpolynom* n-ten Grades von f. Hierbei ist wieder $\omega = 2\pi/T$.

Satz 7.4. *Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $T > 0$ und $\omega = 2\pi/T$. Dann gilt:*

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\,\omega\,x)\,\cos(l\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\,\omega\,x)\,\sin(l\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} T/2 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases},$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\,\omega\,x)\,\sin(l\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\,\omega\,x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definition 7.5 (Fourierreihe)**.** Sei $T > 0$, $\omega = 2\pi/T$, und sei $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit Fourierkoeffizienten a_k, b_k. Dann heißt

$$F_\infty(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k\,\cos(k\,\omega\,x) + b_k\,\sin(k\,\omega\,x)\right)$$

die *Fourierreihe* von f.

[9] Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830

Definition 7.6 (Skalarprodukt und Norm von Funktionen)**.** Sei $C[a,b]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Für $f, g \in C[a,b]$ sei

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x, \text{ und } \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Bemerkung 7.7. *$\langle f, g\rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $C[a,b]$ und $\|f\|$ eine Norm.*

Satz 7.8. *Die Funktionen*

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}, \frac{\cos(k\,x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(k\,x)}{\sqrt{\pi}}, \; k \in \mathbb{N}$$

bilden ein Orthonormalsystem (siehe Satz 7.4) in $C[-\pi,\pi]$. Insbesondere gilt für $g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k\, \cos(k\,x) + d_k\, \sin(k\,x))$

$$\|g\|^2 = \pi \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k^2 + d_k^2\right) \right).$$

Satz 7.9 (Approximation durch Fourierpolynome)**.** *Sei $f \in C[-\pi,\pi]$ mit Fourierpolynom F_n, und sei T_n ein beliebiges trigonometrisches Polynom vom Grad n. Dann gilt*

i) $\|f - F_n\| \leq \|f - T_n\|$.

ii) $\lim_{n\to\infty} \|f - F_n\|^2 = 0$ *(Konvergenz der Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen f).*

8 Differenzierbarkeit II

Definition 8.1 (Reellwertige Funktion mehrerer Variablen)**.** Eine (reellwertige) *Funktion von mehreren* Variablen ist eine Abbildung

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei D eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Statt $(x_1, \ldots, x_n)$ wird auch oft $\mathbf{x}$ geschrieben, und so $f(\mathbf{x})$ anstelle von $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 8.2 (Grenzwert einer Folge von Vektoren)**.** Eine Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, heißt *konvergent gegen* $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$, bezeichnet als $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$, falls der Abstand zwischen $\mathbf{x}_k$ und $\mathbf{x}^\star$

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^\star\| = \sqrt{(\mathbf{x}_{k,1} - \mathbf{x}_1^\star)^2 + (\mathbf{x}_{k,2} - \mathbf{x}_2^\star)^2 + \cdots + (\mathbf{x}_{k,n} - \mathbf{x}_n^\star)^2}$$

gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^\star\| = 0.$$

Man schreibt auch $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}^\star$.

Definition 8.3 (Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$. Wenn es ein $y^\star \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathbf{x}_k \in D \setminus \{\mathbf{x}^\star\}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$$

gilt, dass die Folge der Funktionswerte $(f(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $y^\star$ konvergiert, also

$$\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = y^\star,$$

dann heißt $y^\star$ *der Grenzwert von* f *für* $\mathbf{x}$ *gegen* $\mathbf{x}^\star$. Man schreibt dafür

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} f(\mathbf{x}) = y^\star.$$

Hierbei ist auch $y^\star = \pm\infty$ erlaubt, und man spricht dann von bestimmter Divergenz (vgl. Def. 3.9).

Definition 8.4 (Vektorwertige Funktion)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Unter einer (vektorwertigen) Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ versteht man die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{f}_m(\mathbf{x}))$, wobei $\mathbf{f}_i : D \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, reellwertige Funktionen sind.

Bemerkung 8.5.

i) *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beschreibt eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

ii) *Im Falle $n = 1$ nennt man f auch (parameterisierte) Kurven.*

Definition 8.6 (Grenzwert einer Funktion)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion, und sei $\mathbf{x}^\star \in \mathbb{R}^n$. Wenn es ein $\mathbf{y}^\star \in \mathbb{R}^m$ gibt, so dass für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathbf{x}_k \in D \setminus \{\mathbf{x}^\star\}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^\star$$

gilt, dass die Folge der Funktionswerte $(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen $\mathbf{y}^\star$ konvergiert, also

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}^\star,$$

dann heißt $\mathbf{y}^\star$ *der Grenzwert von* $\mathbf{f}$ *für* $\mathbf{x}$ *gegen* $\mathbf{x}^\star$. Man schreibt dafür

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^\star.$$

Mit anderen Worten: $\mathbf{y}^\star$ ist der Grenzwert von $\mathbf{f}$ für $\mathbf{x}$ gegen $\mathbf{x}^\star$ genau dann, wenn $\mathbf{y}_i^\star$ der Grenzwert von $\mathbf{f}_i$ für $\mathbf{x}$ gegen $\mathbf{x}^\star$ und für $1 \le i \le m$ ist (vgl. Def. 8.3).

Definition 8.7 (Partielle Ableitung(en))**.** Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine Funktion und $\mathbf{x}^\star \in D$.

i) Unter der *partiellen Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\star)$ *von* f *nach* x_i in einem Punkt $\mathbf{x}^\star$ versteht man die Ableitung von f nach der Variablen x_i, während die übrigen Variablen als Konstante betrachtet werden. Formell bedeutet dies, dass der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\star) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^\star + h\,\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^\star)}{h}$$

existieren muss, wobei $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\intercal$ den i-ten Einheitsvektor bezeichnet.

ii) Ist f in jedem Punkt $\mathbf{x}^\star \in D$ partiell nach x_i differenzierbar, dann heißt f *partiell nach* x_i *differenzierbar*, und die Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

heißt *partielle Ableitung von* f *nach* x_i.

iii) Ist f partiell nach x_i differenzierbar für $1 \le i \le n$, dann heißt f *partiell differenzierbar*.

iv) f *heißt stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ stetig sind.

Definition 8.8 (Gradient)**.** Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

Gradient von f im Punkt $\mathbf{x}$.

Bemerkung 8.9. *Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, partiell differenzierbare Funktionen. Dann gilt die Produktregel (vgl. Satz 4.3 iii))*

$$\operatorname{grad}(f \cdot g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} g(\mathbf{x}).$$

Definition 8.10 (Höhere partielle Ableitungen)**.** Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine partiell differenzierbare Funktion. Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ selbst wieder partiell differenzierbar, so heißt f zweimal partiell differenzierbar, und man schreibt statt $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

für die partielle Ableitung nach x_j der partielle Ableitung nach x_i.

Entsprechend sind höhere (k-te) partielle Ableitung definiert

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Satz 8.11 (Schwarz[10])**.** *Ist $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt für $1 \le i, j \le n$*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Entsprechende Aussagen gelten für höhere (k-te) partielle Ableitungen, wenn f eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist.

[10] Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921

Definition 8.12 ((totale) Differenzierbarkeit)**.** Sei $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, eine Abbildung. $\mathbf{f}$ heißt in $\mathbf{x}^\star \in D$ *(total) differenzierbar*, falls es eine Matrix $A(\mathbf{x}^\star) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt, so dass

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) + A(\mathbf{x}^\star)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star) + r(\mathbf{x})$$

mit

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^\star} \frac{r(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\star\|} = 0.$$

$A(\mathbf{x}^\star)$ heißt die *Ableitung oder das Differential von* $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}^\star$.

Definition 8.13 (Jacobi[11]-Matrix)**.** Sei $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, eine partiell differenzierbare Abbildung, d.h. alle Koordinaten-Funktionen $\mathbf{f}_i$ sind partiell differenzierbar, und sei $\mathbf{x}^\star \in D$. Die $(m \times n)$-Matrix

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^\star) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \end{pmatrix}$$

heißt *Jacobi-Matrix* oder auch *Funktional-Matrix*.

Satz 8.14 (Kettenregel (vgl. Satz 4.3 v)))**.** *Sei* $\mathbf{g} : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*,* C *offen, in* $x^\star \in C$ *differenzierbar, und sei* $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$*,* D *offen, mit* $\mathbf{g}(C) \subseteq D$*, und es sei* $\mathbf{f}$ *in* $\mathbf{g}(\mathbf{x}^\star)$ *differenzierbar. Dann ist die Verknüpfung* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : C \to \mathbb{R}^k$ *in* $\mathbf{x}^\star$ *differenzierbar, und es gilt:*

$$J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(\mathbf{x}^\star) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{x}^\star)) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}^\star).$$

Definition 8.15 (Lokale Extrema (vgl. Def. 4.9))**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $\mathbf{x}^\star \in D$ heißt

i) *lokales Maximum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^\star, \epsilon) \cap D.$$

ii) *lokales Minimum*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^\star, \epsilon) \cap D.$$

iii) *globales Maximum*, falls

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in D.$$

iv) *globales Minimum*, falls

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star) \text{ für alle } \mathbf{x} \in D.$$

v) Lokale/globale Minima oder Maxima werden als lokale/globale Extrema bzw. Extremwerte der Funktion bezeichnet.

Satz 8.16 (vgl. Satz 4.10)**.** *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, und sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *partiell differenzierbar. Besitzt* f *in* $\mathbf{x}^\star \in D$ *ein lokales Extremum, dann ist* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$.

[11] Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851

Definition 8.17 (Hesse[12]-Matrix)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Für $\mathbf{x}^\star \in D$ heißt die symmetrische $(n \times n)$-Matrix

$$H_f(\mathbf{x}^\star) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}^\star) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}^\star) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}^\star) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}^\star) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}^\star) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}^\star) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f in $\mathbf{x}^\star$.

Satz 8.18 ((vgl. Satz 4.10 ii), iii))**.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei $\mathbf{x}^\star \in D$ mit $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{0}$.*

i) *Ist $H_f(\mathbf{x}^\star)$ positiv definit, dann ist $\mathbf{x}^\star$ ein lokales Minimum.*

ii) *Ist $H_f(\mathbf{x}^\star)$ negativ definit, dann ist $\mathbf{x}^\star$ ein lokales Maximum.*

iii) *Ist $H_f(\mathbf{x}^\star)$ weder positiv noch negativ semi-definit (d.h. indefinit), dann ist $\mathbf{x}^\star$ kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt.*

iv) *Ist $H_f(\mathbf{x}^\star)$ negativ semi-definit oder positiv-definit, dann ist keine Aussage möglich.*

Bemerkung 8.19. *Eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann positiv definit wenn $a_{11} > 0$ und $\det A > 0$. Sie ist genau dann negativ definit wenn $a_{11} < 0$ und $\det A > 0$.*

Satz 8.20 (vgl. Satz 3.16)**.** *Jede stetige Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nimmt auf einer kompakten Menge D ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in D$ mit*

$$\begin{aligned} f(\tilde{\mathbf{x}}) &= \max\{f(\mathbf{x}) : x \in D\}, \textit{und} \\ f(\hat{\mathbf{x}}) &= \min\{f(\mathbf{x}) : x \in D\}. \end{aligned}$$

Satz 8.21 (Lokale Extrema unter Nebenbedingungen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen. Sei $M = \{x \in D : g(x) = 0\}$ und sei $\mathbf{x}^\star \in M$ mit $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}^\star) \neq \mathbf{0}$. Ferner sei $\mathbf{x}^\star$ ein lokales Maximum (Minimum) von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, d.h. es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass gilt*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^\star) \quad (\textit{bzw. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star)) \ \textit{ für alle } \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^\star, \epsilon) \cap M.$$

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^\star) = \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{x}^\star).$$

Man nennt λ einen Lagrange[13]-Multiplikator.

[12] Otto Hesse, 1811-1874

[13] Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813

9 Integralrechnung II

Definition 9.1 (Quader)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, $1 \leq i \leq n$, heißt $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_1,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Quader (mit Kantenlängen $b_i - a_i$, $1 \leq i \leq n$). Das *Volumen* $\mathrm{vol}(Q)$ des Quaders ist gegeben durch

$$\mathrm{vol}(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Bemerkung 9.2. *Im allgemeinen Fall geht man wie folgt vor: Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf der beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Wähle einen Quader Q mit $D \subseteq Q$ und betrachte*

$$\tilde{f} : Q \to \mathbb{R} \text{ mit } \tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \mathbf{x} \in D, \\ 0 & : \mathbf{x} \in Q \setminus D. \end{cases}$$

Dann setzt man

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_Q \tilde{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

falls die rechte Seite existiert.

Bemerkung 9.3. *Auch für diese Riemann-Integrale im $\mathbb{R}^n$ gelten die üblichen Eigenschaften in „kanonischer Weise“ (vgl. Satz 6.1, Bem. 6.2, Lemma 6.3).*

Definition 9.4 (Volumen einer Menge im $\mathbb{R}^n$)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann heißt (falls existent)

$$\mathrm{vol}(D) = \int_D 1\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

das *Volumen der Menge D*. Man integriert also die konstante Funktion 1 über den Bereich.

Satz 9.5 (Fubini[14])**.**

i) *$n = 2$: Sei $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1.$$

ii) *$n \geq 2$: $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_Q f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \mathrm{d}x_n,$$

wobei man auf der rechten Seite auch jede andere Reihenfolge beim Integrieren verwenden darf.

Definition 9.6 (Normalbereich)**.** Ein 2-dimensionaler *Normalbereich* (bzgl. der x-Achse) ist eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, \alpha_1(x_1) \leq x_2 \leq \beta_1(x_1) \right\};$$

dabei seien $a < b$ und $\alpha_1, \beta_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Entsprechend definiert man einen Normalbereich bzgl. der y-Achse, bzw. Normalbereiche in Dimensionen ≥ 3. Z.B. ist

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3 : a \leq x_1 \leq b, \alpha_1(x_1) \leq x_2 \leq \beta_1(x_1), \alpha_2(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \beta_2(x_1, x_2) \right\}$$

ein Normalbereich in $\mathbb{R}^3$. Hierbei sind zusätzlich $\alpha_2, \beta_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

[14] Guido Fubini, 1879-1943

Satz 9.7. *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion auf D. Dann gilt:*

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1(x_1)}^{\beta_1(x_1)} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\,x_2 \right) \mathrm{d}\,x_1.$$

Eine analoge Aussage gilt für Normalbereiche in Dimension ≥ 3. Mit der Notation aus Definition 9.6 gilt z.B. für $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \int_a^b \left(\int_{\alpha_1(x_1)}^{\beta_1(x_1)} \left(\int_{\alpha_2(x_1,x_2)}^{\beta_2(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}\,x_3 \right) \mathrm{d}\,x_2 \right) \mathrm{d}\,x_1.$$

Satz 9.8. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$, und sei $t \in \mathbb{R}^n$. Sei $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ mit $D = A\,\widetilde{D} + t = \{A\,x + t : x \in \widetilde{D}\}$. Dann gilt*

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = |\det A| \cdot \int_{\widetilde{D}} f(A\,\mathbf{x} + t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{vol}(D) = |\det A|\,\mathrm{vol}(\widetilde{D})$.

Korollar 9.9. *Sei $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $\lambda \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^n$ und*

$$\lambda\,\widetilde{D} + t = \{\lambda\,\mathbf{x} + t : \mathbf{x} \in \widetilde{D}\}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{vol}(\lambda\,\widetilde{D} + t) = |\lambda|^n\,\mathrm{vol}(\widetilde{D}).$$

Satz 9.10 (Transformationssatz)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Sei $\mathbf{T} : \widetilde{D} \to D$ eine bijektive Abbildung von einer Menge $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ nach D, die stetig partiell differenzierbar ist und deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig partiell differenzierbar ist. Dann gilt*

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\widetilde{D}} f(\,\mathbf{T}(\mathbf{x})\,) \cdot |\det J_{\mathbf{T}}(\mathbf{x})|\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Bemerkung 9.11.

i) *Für $n = 1$ ist dies (im wesentlichen) die Substitutionsregel aus Satz 6.12.*

ii) *Ist $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + t$ eine affine Abbildung, dann erhält man gerade Satz 9.8.*

Definition 9.12 (Polar(Kugel)- Zylinderkoordianten)**.**

i) Jedes $x \in \mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$x = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\phi \in [0, 2\pi)$.

ii) Jedes $x \in \mathbb{R}^3$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\begin{pmatrix} r\,\cos\phi\sin\vartheta \\ r\,\sin\phi\sin\vartheta \\ r\,\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta \in [0, \pi]$.

iii) Jedes $x \in \mathbb{R}^3$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$\begin{pmatrix} r\,\cos\phi \\ r\,\sin\phi \\ t \end{pmatrix}$$

mit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und $t \in \mathbb{R}$.

Die Darstellungen i) und ii) nennt man allgemein *Polarkoordinaten-Darstellungen*, ii) auch *Kugelkoordinaten-Darstellung* und iii) heißt *Zylinderkoordinaten-Darstellung*.

Definition 9.13 (Vektorwertige Integrale)**.** Sei $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, und es sei jede einzelne Koordinatenfunktion $\mathbf{f}_i : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $1 \leq i \leq m$. Dann ist

$$\int_D \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \int_D \mathbf{f}_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ \int_D \mathbf{f}_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ \vdots \\ \int_D \mathbf{f}_m(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Definition 9.14 (Schwerpunkt)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{vol}(D) > 0$. Dann heißt der Punkt

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_D \mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

der Schwerpunkt von D.

Index