Studentenkonferenz

zum Dies academicus
am Institut für Mathematik

Technische Universität Berlin
20. Oktober 2004

Programm

	MA 001	MA 042
13.00-13.05	**Prof. Dr. Günter M. Ziegler** Eröffnung	
13.05-13.25	**Michaela Sibold** Aktive Mathematik: Der Abbau von Medikamenten	
13.30-13.50	**Markus Müller** Der Quanten-Shannon-McMillan-Satz am Beispiel der Heisenbergschen Spinkette	**Björn Stenzel** AGV-Steuerung im Hamburger Hafen: Online-Analyse und Algorithmen für fahrerlose Transportsysteme
13.55-14.15	**Andreas Hahn** Arbitragefreie Bewertung von Optionen unter Transaktionskosten	**Stephanie Müller** Eigenwertgleichungen in der Kurventheorie
14.20-14.40	**Dmitrij Sverdlov** Die zyklische Zahl von Graphen und Färben von Hyperwürfeln	**Falk Ebert** Ein kontrolltheoretischer Zugang zur Simulatorkopplung
14.40-15.10	**Pause**	
15.10-15.30	**Torsten Schöneborn** Das Topologische Tverberg-Theorem und Windungszahlen	**Klaus Hildebrandt** Diskrete Krümmungen und Charakteristika erhaltendes Glätten von Flächen
15.35-15.55	**Magda Nafalska** Extremale Erweiterungen symmetrischer Operatoren	**Gregor Wünsch** Optimierung von Ampel-Gesteuerten Verkehrsnetzen: Modelle und Algorithmen
16.00-16.20	**Sebastian Heller** Über die Klassifizierung von Willmore Sphären	**Markus Heydenreich** Diffusion und Verzweigung in zufälligem katalytischem Medium
16.25-16.45	**Nikolaus Witte** Entfaltung simplizialer Sphären	**Friederike Sziegoleit** Bedingt minimale Flächen

Ein kontrolltheoretischer Zugang zur Simulatorkopplung

Falk Ebert

Numerische Simulation ist in vielen industriellen und wissenschaftlichen Anwendungen zu einem wichtigen Hilfsmittel geworden. Mit zunehmender Komplexität der Modelle werden auch immer mehr unterschiedliche Aspekte eines Systems betrachtet. Für die Mathematik bedeutet das meist, mehrere miteinander verkoppelte Systeme von Differentialgleichungen (ODEs), Differential-Algebraischen Gleichungen (DAEs) und Partiellen Differentialgleichungen (PDEs) zu lösen.

Anstatt das komplette *monolithische* System mit einem einzigen Löser zu behandeln, beruht der immer populärer werdende Zugang der *Simulatorkopplung* darauf, jedes der meist sehr unterschiedlich gearteten Teilsysteme mit einem passenden Simulator zu lösen und in gewissen Zeitintervallen, sogenannten *Makroschritten*, Daten über die Verkopplung auszutauschen. Dieses Iterationsverfahren, auch als *waveform relaxation* bekannt, ist besonders für die Parallelisierung von numerischen Simulationen attraktiv.

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist die Untersuchung der Simulatorkopplung mit Mitteln der Kontrolltheorie. Dabei wird das Hauptaugenmerk auf die Verkopplung von ODEs und DAEs gelegt. Wir werden einen Beobachter zur Approximation der Fehlerfortpflanzung innerhalb der Relaxationsmethode konstruieren und mit dessen Hilfe Kriterien für die Konvergenz gekoppelter ODEs und DAEs entwickeln. Desweiteren wird eine Regularisierungsmethode vorgestellt werden, mit deren Hilfe man ein ursprünglich divergentes Relaxationsverfahren in ein konvergentes verwandeln kann. Weiterhin werden wir einen einfachen Regler entwerfen und einstellen, welcher die Lösungsgenauigkeit bei der Simulation der Teilsysteme an die benötigte Genauigkeit für das Gesamtsystem anpasst um so Rechenaufwand zu reduzieren. Zuletzt wird noch die Implementation eines für den Regler benötigten Fehlerschätzers in den Code RADAU5 beschrieben.

Arbitragefreie Bewertung von Optionen unter Transaktionskosten

Andreas Hahn

Wir betrachten ein Marktmodell mit Transaktionskosten. In einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}, \mathbf{P})$ sei ein riskantes Asset $(S_t(\omega))_{t=0,\ldots,T}$ gegeben, welches proportional konstanten Transaktionskosten unterliegt.

Nachdem ein Überblick über die Ergebnisse der klassischen Finanzmathematik gegeben wurde, wollen wir auf ein Kriterium eingehen, wann ein Marktmodell mit Transaktionskosten arbitragefrei ist, d.h. keinen risikolosen Gewinn ermöglicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein strikt konsistenter Preisprozeß $(Z_t(\omega))_{t=0,\ldots,T}$ existiert. Diese konsistenten Preisprozesse werden die Rolle der äquivalenten Martingalmaße der klassischen Finanzmathematik übernehmen. Mit Hilfe der konsistenten Preisprozesse werden dann europäische und amerikanische Optionen bewertet. Zum Ende des Vortrages werden wir dann unser Ergebnis mit denen der klassischen Finanzmathematik vergleichen.

Über die Klassifizierung von Willmore Sphären

Sebastian Heller

Das klassische Willmore Funktional einer Immersion $f\colon M \to \mathbb{R}^3$ einer kompakten Riemannschen Fläche M ist definiert als $\int_M (H^2 - K)dA$, wobei H und K die Hauptkrümmung bzw. Gaußkrümmung und dA die induzierte Volumenform von f sind. Obwohl das Willmore Funktional durch Euklidische Größen gegeben ist, sind der Integrand und damit auch das Funktional Möbius invariant. Deshalb ist der geeignete Raum für Untersuchungen des Willmore Funktionals die konforme 3–Sphäre und nicht der Euklidische Raum.

In diesem Vortrag werden wir erklären wie immersierte Willmore Sphären in S^3 mit Minimalflächen vom Geschlecht 0 mit flachen Enden in $\mathbb{R}^3$ zusammenhängen. Diese wiederum stammen alle von holomorphen Kontaktkurven in $\mathbb{CP}^3$ ab. Damit können wir alle Werte bestimmen, welche das Willmore Funktional für Willmore Sphären in S^3 annehmen kann. Abschließend werden wir Beispiele von Minimalflächen vom Geschlecht 0 mit flachen Enden angeben und graphisch darstellen.

Diffusion und Verzweigung in zufälligem katalytischem Medium

Markus Heydenreich

In diesem Vortrag soll eine Diplomarbeit aus dem Gebiet Wahrscheinlichkeitstheorie vorgestellt werden.

Zunächst gehen wir von einem einfachen Modell chemischer Reaktionen aus. Dabei betrachten wir kleine Teilchen (Reaktanten), die einer Irrfahrt auf dem d-dimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^d$ folgen. Unter dem Einfluß eines Katalysators teilen sich die Reaktanten. Wir bezeichnen mit $u(t,x)$ die mittlere Anzahl der Reaktanten zur Zeit t im Gitterpunkt x. Dann ist u Lösung des *parabolischen Anderson Problems*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \kappa\,\Delta u(t,x) + \xi(t,x)\,u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^d; \\ u(0,x) = 1, & x \in \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Hierbei ist κ eine Diffusionskonstante, Δ der diskrete Laplace-Operator und $\xi(t,x)$ beschreibt die Stärke des Katalysators zum Zeitpunkt t am Gitterpunkt x.

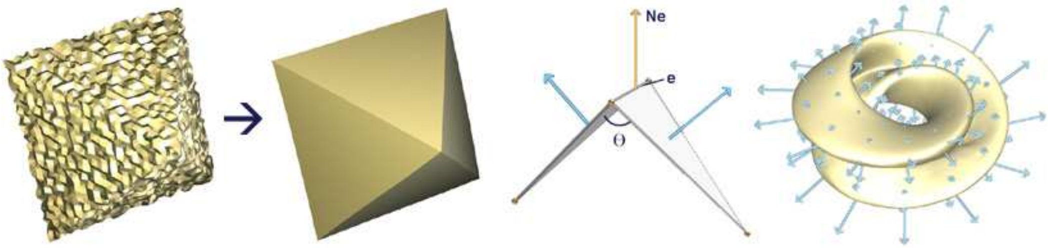
Wir wollen nun für eine (sehr) spezielle Form des Katalysators das Langzeitverhalten analysieren. Dabei soll die exponentielle Wachstumsrate der Momente von u identifiziert und deren Abhängigkeit von den Parametern des Modells untersucht werden.

Diskrete Krümmungen und Charakteristika erhaltendes Glätten von Flächen

Klaus Hildebrandt

Rauschen ist ein allgegenwärtiges Artefakt von 2d und 3d Flächennetzen aufgrund von Auflösungsproblemen in dem Erstellungsprozess. Zum Beispiel tragen Netze, die aus Bilddaten extrahiert oder von Laserscannern erstellt werden, oft Rauschen in den Positionen der Ecken. Viele Filterungstechniken wurden in den letzten Jahren entwickelt, unter diesen ist das Laplaceglätten das bekannteste Beispiel.

Wir präsentieren einen anisotropen geometrischen Fluss, der das Rauschen in Flächendatensätzen verringert. Die Methode fokussiert darauf, lineare und gekrümmte Flächencharakteristika während des Glättens zu erhalten oder zu verstärken. Das Verfahren basiert auf einer konsistenten Formulierung und expliziten Berechnung von Krümmungen diskreter Flächen.



Der Quanten-Shannon-McMillan-Satz am Beispiel der Heisenbergschen Spinkette

Markus Müller

Einer der grundlegenden Grenzwertsätze der klassischen Informationstheorie ist der Shannon-McMillan-Breiman-Satz. Er sagt aus, dass bei ergodischen, stationären Prozessen die Folge der Zufallsvariablen mit hoher Wahrscheinlichkeit in einer kleinen Teilmenge aller möglichen Ergebnisse liegt. Innerhalb dieser "typischen" Teilmenge sind alle Elementarereignisse etwa gleich wahrscheinlich.

Wie in [1] gezeigt werden konnte, gilt eine analoge Aussage auch in der Quanteninformationstheorie. Ziel dieser Arbeit ist es, die Konsequenzen dieses "Quanten-Shannon-McMillan-Satzes" für die Statistische Physik zu untersuchen, und zwar am Modell der Heisenbergschen Spinkette.

Anhand einer geeigneten Näherung wird hier gezeigt, dass die typischen Zustände der Spinkette genau die Zustände sind, deren Energie nahe an der inneren Energie u liegt. Wichtigstes Ergebnis ist damit eine exakte Begründung der "Äquivalenz der Gesamtheiten": Das mikrokanonische Ensemble erweist sich als die Restriktion des Gibbszustandes auf den typischen Unterraum. Daher folgt die mikrokanonische Gleichverteilung aus der "AEP" (asymptotic equipartition property) des Shannon-McMillan-Satzes.

[1] I. Bjelakovic, T. Krüger, R. Siegmund-Schultze, A. Szkola, *The Shannon-McMillan theorem for ergodic quantum lattice systems*, Invent. math. 155, 203 - 222 (2004)

Eigenwertgleichungen in der Kurventheorie

Stephanie Müller

Nach dem Fundamentalsatz der ebenen Kurventheorie gibt es eine - modulo Euklidischer Bewegungen - eindeutig bestimmte ebene Kurve, wenn man ihre stetige Krümmungsfunktion als Funktion eines Bogenlängenparameters vorgibt. Das gilt entsprechend bei sphärischer Parametrisierung.

Dieses altbekannte Resultat wurde in der Literatur kürzlich benutzt, um Kegelschnitte durch spezielle Eigenwertgleichungen für den Krümmungsradius bei sphärischer Parametrisierung zu charakterisieren.

In meiner Arbeit gehe ich von einer Eigenwertgleichung mit beliebigem Eigenwert aus; sie wird von Rollkurven und Spiralen erfüllt, aber auch von ihren Evoluten. Betrachtet man für diese Kurvenklassen die Abwicklungen (Evolventen), so kommen noch Parallelkurven hinzu; sie erfüllen eine erweiterte Eigenwertgleichung mit konstanter Inhomogenität.

Um zu einer Charakterisierung einer Kurvenklasse zu kommen, analysiert man das Vorangehende geometrisch und analytisch. Als Resultat erhält man einen Charakterisierungssatz für eine große Kurvenklasse durch eine Eigenwertgleichung mit linearer Inhomogenität. Diese Charakterisierung ist neu.

Analoge Eigenwertgleichungen werden für die Stützfunktion untersucht, die zu derselben Kurvenklasse führen. Dabei spielen Beziehungen zwischen den Eigenwertgleichungen für die Stützfunktion bzw. für den Krümmungsradius eine wichtige Rolle zur geometrischen Interpretation der Lösungen der untersuchten Gleichungen.

Mit Hilfe von Mathematica werden die auftretenden Kurvenklassen bildlich dargestellt.

Extremale Erweiterungen symmetrischer Operatoren

Magda Nafalska

Ausgehend von einem dicht definierten, nichtnegativen (unbeschränkten) Operator sind wir an dessen nichtnegativen, selbstadjungierten Erweiterungen interessiert. Zwei Extremfälle sind die Friedrichs- und die Krein-von Neumann-Erweiterung, deren besondere Eigenschaften vorgestellt werden. Darüberhinaus werden die Friedrichs- und die Krein-von Neumann-Erweiterung eines einfachen Differentialoperators angegeben und die Eigenwerte und Eigenfunktionen der beiden o.g. Erweiterungen diskutiert.

Das Topologische Tverberg-Theorem und Windungszahlen

Torsten Schöneborn

Das Topologische Tverberg-Theorem behauptet, dass unter jeder stetigen Abbildung des $(q-1)(d+1)$-Simplex in den $\mathbb{R}^d$ q disjunkte Seiten durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Dies ist bewiesen für affine Abbildungen, $d = 1$, und Primzahlpotenzen q, aber noch nicht in voller Allgemeinheit.

Das Topologische Tverberg-Theorem kann auf Abbildungen des d-Skeletts des Simplex eingeschränkt werden. Weiterhin zeigen wir, dass es äquivalent zu einer "Windungszahlvermutung" ist, die sich auf das $(d-1)$-Skelett des $(q-1)(d+1)$-Simplex beschränkt. "Viele Tverberg Partitionen" gibt es genau dann, wenn es "viele Windungspartitionen" gibt. Der Fall $d = 2$ der Windungszahlvermutung behandelt Abbildungen des vollständigen Graphen K_{3q-2} in der Ebene. Wir untersuchen Graphen, welche die zugehörige Windungszahleigenschaft teilen.

Aktive Mathematik: Der Abbau von Medikamenten

Michaela Sibold

Aktive Mathematik bedeutet, sich die für die Lösung eines praktischen Problems erforderliche Mathematik zu erarbeiten. Nicht der zu vermittelnde mathematische Stoff ist vorgegeben und ein „praktisches Anwendungsbeispiel" ist gesucht, sondern umgekehrt: Ein Problem ist gegeben und soll mit Hilfe von Mathematik gelöst werden.

Beim vorliegenden Projekt geht es darum, die Dosierung und den Abbau von Medikamenten zu modellieren:
„Woher weiß ein Arzt, wie viel Wirkstoff er einem Menschen verschreiben muss? Wie viel dieses Wirkstoffs gelangt schließlich in den Organismus und wie viel wird wieder ausgeschieden?" Um solche Fragen beantworten zu können, wird ein Modell und damit eine mathematische Beschreibung der Aufnahme und Verteilung eines Wirkstoffs in einem Organismus vorgestellt. Mathematisch geschieht dies durch die *Bateman-Funktion*, die als Lösungskomponente eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen auftritt:

$$b(t) \quad = \quad m_0 \frac{k_M}{k_B - k_M}(e^{-k_M t} - e^{-k_B t}).$$

Die Konstanten k_M und k_B werden durch die numerischen Verfahren der *Gaußschen Fehlerquadratmethode* und des *Newton-Verfahrens* bestimmt.

AGV-Steuerung im Hamburger Hafen: Online-Analyse und Algorithmen für fahrerlose Transportsysteme

Björn Stenzel

Automatisierte Logistiksysteme werden mit fahrerlosen Transportfahrzeugen, sogenannten Automated Guided Vehicles (AGVs), betrieben. Im Containerterminal Altenwerder im Hamburger Hafen werden solche AGVs für den Transport von Containern zwischen Schiff und Lager eingesetzt.

Die Steuerung von fahrerlosen Transportfahrzeugen ist ein Realzeitproblem, d.h. Routinganfragen müssen online (ohne Kenntnis zukünftiger Anfragen) und in angemessener Zeit (hier zumindest unterhalb einer Sekunde) beantwortet werden. Ziel ist es, unter Gewährleistung von Konfliktfreiheit, den Durchsatz zu maximieren.

Die Arbeit beschäftigt sich einerseits mit der Online-Analyse (mittels kompetitiver Analyse) verschiedener Algorithmen und andererseits mit der Entwicklung und Implementation eines neuen Algorithmus.

Im Gegensatz zu zur Zeit eingesetzten statischen (zeitunabhängigen) Verfahren beruht der Algorithmus auf der Berechnung von (dynamischen) kürzesten Wegen mit Zeitfenstern (Shortest Path Problem with Time-Windows). Das SPPTW ist NP-schwer. Es kann allerdings im für die AGV-Steuerung relevanten Spezialfall, in dem die Kosten den Fahrzeiten entsprechen, in polynomialer Zeit gelöst werden.

Der Vorteil des neu entwickelten Algorithmus besteht vor allen Dingen darin, dass Konflikte bereits durch die Routenberechnung ausgeschlossen werden können, was eine zusätzliche, mit Problemen behaftete Kollisionsvermeidung während der Fahrt der AGVs überflüssig macht.

In Tests auf Basis von realitätsnahen Szenarien konnte sowohl dieser Vorteil quantifiziert als auch die Realzeit-Tauglichkeit hinsichtlich der Rechenzeiten aufgezeigt werden.

Die zyklische Zahl von Graphen und Färben von Hyperwürfeln

Dmitrij Sverdlov

Seien G und H zwei Graphen. Eine Bijektion $f : E(G) \to E(H)$ zwischen ihren Kanten heißt *zyklisch*, falls das Bild von jedem Zykel (eulerscher Untergraph, d.h. jeder Knoten hat geraden Grad) in G ein Zykel in H ist. Die zyklische Zahl des Graphen G $\phi(G)$ ist die kleinste Ordnung vom Graph H, so dass es eine zyklische Bijektion $f : E(G) \to E(H)$ gibt.

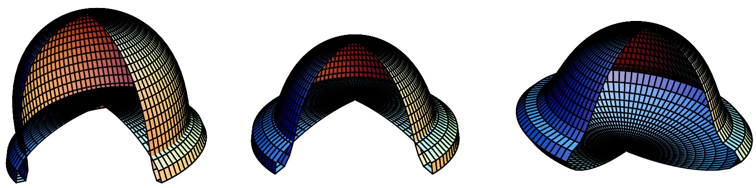
Wesentlich für den Zusammenhang zwischen der zyklischen und der Farbzahl eines Graphen ist die Kenntniss der Farbzahl von $Q_n[2]$, dem n-dimensionalen Hyperwürfelgraph, dessen Ecken durch eine Kante verbunden sind, falls sie im Abstand 2 voneinander liegen. Nach einer Einführung und Beispielen stellen wir das Hauptergebnis unseres Vortrages vor: Die Farbahl von $Q_n[2]$ ist eine obere Schranke für die Farbzahl *aller* Graphen, die dieselbe zyklische Zahl n haben. Schließlich gehen wir auf die Bestimmung der Farbzahlen von $Q_n[2]$ im Allgemeinen und den Fall $n = 9$ insbesondere ein.

Bedingt minimale Flächen

Friederike Sziegoleit

Die am besten untersuchte Flächenklasse ist die der Minimalflächen. Bekannt sind diese Flächen auch unter dem Begriff "Seifenhäute". Eine Verallgemeinerung stellt die Flächenklasse der *bedingt minimalen Flächen* dar, die in meiner Diplomarbeit untersucht wird. Minimalflächen lassen sich mathematisch als Lösung eines Extremwertproblems mit einer Randbedingung beschreiben. Die Verallgemeinerung auf bedingt minimale Flächen wird dadurch erzielt, dass die Extrema unter einer zusätzlichen Nebenbedingung gesucht werden.

Wie Minimalflächen mathematisch erfasst werden können, und wie sich diese Methode auf bedingt minimale Flächen übertragen lässt, stellen wir in dem Vortrag vor. Davon ausgehend lassen sich zahlreiche Visualisierungen von bedingt minimalen Flächen generieren. Auf wesentliche Unterschiede zwischen den Klassen der Minimalflächen und der bedingt minimalen Flächen wird eingegangen und anhand von Graphiken vorgestellt.



Entfaltung simplizialer Sphären

Nikolaus Witte

Izmestiev und Joswig [1] haben gezeigt, dass jede orientierbare kombinatorische 3-Mannigfaltigkeiten verzweigte Überlagerung einer kombinatorische 3-Sphäre mit einem Knoten als Verzweigungsmenge ist. Sie definierten die *Entfaltung*, die für eine kombinatorische 3-Sphäre den Überlagerungsraum liefert, und zeigten, wie man zu einer gegebenen 3-Mannigfaltigkeit die zu überlagernde 3-Sphäre konstruiert.

Die Entfaltungen sind in der Regel keine simplizialen Komplexe, sondern lediglich pseudosimpliziale Komplexe. Es wird gezeigt, wie sich entscheiden lässt, ob die Entfaltung eines simplizialen Komplexes simplizial sind und wie sich gegebenenfalls effizient ein zu der Entfaltung homöomorpher simplizialer Komplex konstruieren lässt.

Abschließend werden die theoretischen Erkenntnissen angewandt, um Algorithmen zu entwickeln und ausgewählte Mannigfaltigkeit konkret zu konstruieren. So werden z.B. der $(3,1)$-Linsenraum und die Poincaré-Sphäre konstruiert. Insbesondere wird ein Algorithmus zum erzeugen von Sphären mit zufälligen Knoten als Verzweigungsmenge entwickelt und somit die Möglichkeit geschaffen, bestimmte Klassen von 3-Mannigfaltigkeit zufällig zu erzeugen.

[1] I. Izmestiev and M. Joswig. Branched coverings, triangulations, and 3-manifolds *Adv. Geom*, 3(2):191-225, 2003. `arXiv`: math.GT/0108202

Optimierung von Ampel-Gesteuerten Verkehrsnetzen: Modelle und Algorithmen

Gregor Wünsch

Im Folgenden werden zwei Ansätze präsentiert, Wartezeiten in innerstädtischen Ampel-Gesteuerten Verkehrnetzen, denen eine Festzeitschaltung zugrunde liegt, zu minimieren. Als erstes entwickeln wir ein diskretes Modell in dem alle Berechnungen pfadweise durchgeführt werden und sich die Fahrzeuge quasi auf "Zeitschienen" bewegen. Als zweites wird ein Ansatz von Gartner, Little und Gabbay zu einem kontinuierlichen, kantenweise operierenden Modell erweitert. Beide Modelle werden in gemischt-ganzzahligen linearen Programmen umgesetzt und mit Hilfe des Simulationsprogrammes VISSIM miteinander und mit einer Heuristik evaluiert und verglichen.

Vortragende

Falk Ebert
AG Modellierung, Numerik, Differentialgleichungen
ebert@math.tu-berlin.de

Andreas Hahn
AG Stochastik und Finanzmathematik
Andy.Hahn@gmx.net

Sebastian Heller
AG Geometrie und Mathematische Physik
heller@math.tu-berlin.de

Markus Heydenreich
AG Stochastik und Finanzmathematik
M.O.Heydenreich@tue.nl

Klaus Hildebrandt
AG Geometrie und Mathematische Physik
hildebrandt@zib.de

Markus Müller
AG Geometrie und Mathematische Physik
markus.14@gmx.net

Stephanie Müller
AG Geometrie und Mathematische Physik
haste-berlin@t-online.de

Magda Nafalska
AG Modellierung, Numerik, Differentialgleichungen
nafalska@math.tu-berlin.de

Torsten Schöneborn
AG Algorithmische und Diskrete Mathematik
torsten.schoeneborn@gmx.de

Michaela Sibold
AG Modellierung, Numerik, Differentialgleichungen
sibold@math.tu-berlin.de

Björn Stenzel
AG Algorithmische und Diskrete Mathematik
stenzel@math.tu-berlin.de

Dmitrij Sverdlov
AG Algorithmische und Diskrete Mathematik
sverdlov@math.tu-berlin.de

Friederike Sziegoleit
AG Geometrie und Mathematische Physik
niesch@math.tu-berlin.de

Nikolaus Witte
AG Algorithmische und Diskrete Mathematik
witte@math.tu-berlin.de

Gregor Wünsch
AG Algorithmische und Diskrete Mathematik
wuensch@math.tu-berlin.de