

Programmheft



Dies Mathematicus



6. Dezember 2005

Institut für
Mathematik
Technische
Universität
Berlin

Programm* der Studentenkonzferenz

Raum MA 042

- 14.00 Linien- und Taktfahr-
planung - Ein integrier-
ter Optimierungsansatz
DANIEL SCHMIDT
- 14.25 Vergleich von Lösungsverfah-
ren zur Behandlung elliptischer
Optimalsteuerungsverfahren
IRWIN YOUSEPT
- 14.50 Erweiterungen symme-
trischer Operatoren
HANS-CHRISTIAN KREUSLER
- 15.15 — 15 Minuten Pause —
- 15.30 Algebraic Multigrid Pre-
conditioners for Compu-
ting Stationary Distributi-
ons of Markov Processes
ELENA VIRNIK
- 15.55 Verkehrsoptimierung un-
ter Routennebenbedingun-
gen mit Lagrange-Relaxation
und Schnittebenenverfahren
FELIX G. KÖNIG
- 16.20 Planung interferenzbeschränk-
ter zellulärer Funknetze mit-
tels Set-Covering und -Packing
NORMEN ROCHAU

Raum MA 043

- 14.00 Spektralpunkte vom Typ
 π_+ und π_- symmetrischer
Operatoren in Räumen
mit indefinitem Produkt
FRIEDRICH PHILIPP
- 14.25 Kombinatorik projizier-
ter deformierter Produkte
RAMAN SANYAL
- 14.50 Polytope in Verbindung
mit längenbeschränk-
ten gerichteten Kreisen
RÜDIGER STEPHAN
- 15.15 — 15 Minuten Pause —
- 15.30 Mathematische Preis-
planung im ÖPNV
MARIKA NEUMANN
- 15.55 Wachstumsgeschwindigkeit
zweidimensionaler isotro-
per Brownscher Flüsse
HOLGER VAN BARGEN

* Die Beiträge in diesem Heft sind wie im Programm geordnet, erste Spalte vor zweiter Spalte.

Linien- und Taktfahrplanung - Ein integrierter Optimierungsansatz

DANIEL SCHMIDT

Die Zeiten von mit nur ein oder zwei Zügen verkehrenden Traditionslinien, wie dem *Orient Express* oder der *Transsibirischen Eisenbahn*, als Verkehrsmittel an sich sind lange vorbei. Heutzutage bedienen mehrere Züge die stark miteinander verzahnten Linien. Anfang des letzten Jahrhunderts wurden im öffentlichen Personennahverkehr periodische Fahrpläne (Taktfahrplan) eingeführt. Wir sprechen immer dann von einem Taktfahrplan, wenn die Abfahrts- und Ankunftszeiten der Züge einer Linie immer den gleichen Abstand haben. Auch im Fernverkehr fanden die linienbezogenen periodischen Fahrpläne Einzug, so führte zum Beispiel die Deutsche Bahn 1971 den linienbasierten InterCity-Verkehr ein.

Meine Diplomarbeit befasst sich mit dem Thema der simultanen Planung von Linien und Taktfahrplänen. In diesem meine Diplomarbeit vorstellenden Vortrag möchte ich kurz auf die beiden Planungsaspekte eingehen und erläutern, warum er besser ist, sie gemeinsam zu planen. Dabei werde ich auf das der Taktfahrplanung zugrundeliegende Modell *Periodic Event Scheduling Problem (PESP)* näher eingehen. Darauf aufbauend werde ich das integrierte Modell und seine zusätzlichen Anforderungen erläutern. Das es sich bei meiner Diplomarbeit nicht nur um eine theoretische Abhandlung handelt, möchte ich in dem darauffolgenden Teil meines Vortrages zeigen. Wir waren dank der freundlichen Unterstützung der S-Bahn Berlin GmbH in der Lage, das integrierte Modell auch in der Praxis an einem Teil des Berliner S-Bahn Netzes zu testen.

Zu einer ordentlichen Modellbildung gehört auch immer die Grenzen des Modells zu ermitteln. Mit Hilfe des Ansatzes der vollständige Enumeration konnten wir die zusätzlichen Anforderungen hinsichtlich der dadurch entstehenden Einschränkungen analysieren. Zum Ende meines Vortrages möchte ich auch diesen Aspekt meiner Diplomarbeit beleuchten.

Vergleich von Lösungsverfahren zur Behandlung elliptischer Optimalsteuerungsverfahren

IRWIN YOUSEPT

Der Vortrag behandelt Optimalsteuerungsprobleme mit Zustandsbeschränkung, d.h. mit Schranken an den zu steuernden Zustand des Systems. Solche Probleme haben sich in den letzten Jahren wegen ihrer zahlreichen Anwendungen in der Praxis zu einem wichtigen Thema entwickelt. Zum Beispiel wird bei der Kristallzüchtung nur dann die richtige Kristallstruktur erreicht, wenn die Temperatur (der Zustand) des Kristalls eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Diese und viele anderen Anwendungen haben Mathematiker, Physiker und Ingenieure herausgefordert, bessere und effizientere Lösungsverfahren zu entwickeln. In dieser Präsentation werden zwei Lösungsverfahren zur Behandlung von Optimalsteuerungsproblemen bei elliptischer partieller Differentialgleichung mit Zustandsbeschränkung verglichen. Das erste Verfahren, welches ursprünglich von Bergounioux und Kunisch entwickelt wurde, basiert auf einer Aktive-Mengen-Strategie. Nach numerischer Analyse zeigte sich eine deutliche Abhängigkeit des Rechenaufwandes von der Wahl der Diskretisierung. Bei dem zweiten Lösungsverfahren handelt es sich um eine Lavrentievsche Regularisierung der Zustandsbeschränkung, die auf Meyer, Rösch und Tröltzsch zurück geht. Numerische Experimente zeigten, dass im Gegensatz zum ersten Verfahren die regularisierte Methode bei bestimmter Wahl der Parameter nicht von der Gitterzerlegung abhängig ist. Anschließend wird eine Modifikation der regularisierten Methode eingeführt. Mit dieser Modifikation reduziert sich die Anzahl der benötigten Iterationen um etwa die Hälfte. Dies führt zu einer wesentlich höheren Effizienz des Verfahrens.

Erweiterungen symmetrischer Operatoren

HANS-CHRISTIAN KREUSLER

Die Erweiterungstheorie symmetrischer Operatoren ist ein klassisches Teilgebiet der Funktionalanalysis, welches bereits auf Arbeiten von J. VON NEUMANN aus den dreißiger Jahren zurückgeht und in vielen Anwendungen bedeutsam ist.

So treten symmetrische Operatoren bei Randwertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen auf, deren Lösungen unter gewissen Bedingungen durch eine spezielle selbstadjungierte Erweiterung eines solchen Operators gewonnen werden können.

Die Beschreibung dieser Erweiterungen und deren Eigenschaften geschieht gewöhnlich durch die NEUMANNschen Formeln. Ein modernerer, wenngleich weniger bekannter Ansatz hierzu ist die Methode der *Randtripel*, die wir in diesem Vortrag vorstellen wollen. Insbesondere befassen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen selbstadjungierte Erweiterungen existieren und wie diese und ihre Eigenschaften beschrieben werden können.

Schließlich stellen wir neue Ergebnisse vor, die klassische Resultate zur Parametrisierung und Spektraltheorie selbstadjungierter Erweiterungen verallgemeinern.

Algebraic Multigrid Preconditioners for Computing Stationary Distributions of Markov Processes

ELENA VIRNIK

Die Berechnung von stationären Verteilungen bei Markov-Prozessen hat zahlreiche Anwendungen in ganz unterschiedlichen Einsatzgebieten. Diese reichen von der Verteilung von Medikamenten im Blutkreislauf bis zum Page Rank bei der Google Suchmaschine. In jedem Fall ist der Eigenvektor zum größten oder zweitgrößten Eigenwert einer stochastischen Matrix zu bestimmen, oder alternativ der Eigenvektor zum kleinsten oder zweitkleinsten Eigenwert einer nicht-symmetrischen singulären M-Matrix. Dabei sind in den Anwendungen diese Matrizen sehr groß und dünn besetzt. Deshalb werden iterative Methoden (wie das Generalized Minimal Residual (GMRES) Verfahren) benötigt. Diese sind jedoch nur dann wirklich effektiv, wenn es gelingt, einen guten Präkonditionierer zu konstruieren. Für symmetrische, nicht-singuläre M-Matrizen, die aus der Diskretisierung von Randwertaufgaben herrühren, ist bekanntermaßen das algebraische Mehrgitterverfahren (z.B. in der Version von Ruge/Stüben) ein sehr guter Präkonditionierer. Das Ziel der Diplomarbeit war, diese Methode für die Lösung unsymmetrischer, singulärer Probleme zu erweitern, ihre Funktionsfähigkeit nachzuweisen und diese an Hand von numerischen Beispielen zu testen.

Verkehrsoptimierung unter Routennebenbedingungen mit Lagrange-Relaxation und Schnittebenenverfahren

FELIX G. KÖNIG

Die Optimierung von Verkehr in stark ausgelasteten Straßennetzen verfolgt zwei scheinbar unvereinbare Ziele: Systemweite Optimalität auf der einen und Fairness gegenüber den einzelnen Verkehrsteilnehmern auf der anderen Seite.

Eine systemweite Optimallösung, welche die Summe aller Fahrzeiten minimiert, behandelt einzelne Verkehrsteilnehmer unfair: Die Fahrzeiten auf den ihnen vorgeschlagenen Routen übersteigen die Fahrzeiten der meisten anderen Verkehrsteilnehmer mit gleichem oder ähnlichem Start- und Zielpunkt unter Umständen um ein Vielfaches. Ein so genanntes User Equilibrium stellt per Definition gleiche Fahrzeiten für Verkehrsteilnehmer mit gleichem Start- und Zielpunkt sicher, führt aber nachweislich zu systemweit gesehen schlechten Lösungen.

Zur Lösung dieses Dilemmas wurde die Berechnung eines System Optimums unter Fairness-Nebenbedingungen vorgeschlagen. Die Berechnung dieses so genannten Constrained System Optimums stellt in zweierlei Hinsicht eine besondere mathematische Herausforderung dar: Zum einen hängen die Fahrzeiten auf den Straßen nichtlinear von der Dichte des auf ihnen fließenden Verkehrs ab, zum anderen besteht die Notwendigkeit Nebenbedingungen an die exponentiell vielen und damit nicht effizient aufzählbaren Wege im betrachteten Straßennetz einzuhalten.

In dieser Arbeit wird eine Lagrange-Relaxation des Problems zur Behandlung der Nichtlinearität formuliert und die Anwendung eines speziellen Schnittebenenverfahrens zur Lösung des resultierenden dualen Lagrange-Problems beschrieben. Die duale Lagrange-Funktion wird dabei durch Dekomposition in ressourcenbeschränkte kürzeste Wege Probleme ausgewertet, welche wiederum von einem zielorientierten Labelling-Algorithmus gelöst werden.

Die durchgeführten Rechenexperimente legen die Vermutung nahe, dass die Laufzeit des vorgestellten Verfahrens jene früherer Ansätze deutlich unterbietet.

Planung interferenzbeschränkter zellularer Funknetze mittels Set-Covering und -Packing

NORMEN ROCHAU

In dieser Arbeit verwenden wir Methoden der Ganzzahligen Optimierung zur Planung der Funkschnittstelle zellularer Funknetze. Die Herausforderung besteht darin, für die Antennen Standorte und Ausrichtungen so zu bestimmen, dass man mit einer minimalen Zahl von Antennen eine maximale Ausbeute an Netzabdeckung, Kapazität und Signalqualität erreicht. Die Folgen schlechter Planung sind für den Kunden mangelhafte Abdeckung und schlechte Signalqualität, und für den Netzbetreiber erhöhte Kosten, denn mehr Antennen müssen auf mehr Standorten betrieben werden, als bei guter Planung notwendig wäre. Wir stellen in dieser Arbeit ein technologieübergreifendes Verfahren zur automatischen Planung der Funkschnittstelle vor. Mit diesem Verfahren ermitteln wir auf Basis von Verkehrsdaten und Prädiktionen über die Signalausbreitung Netzkonfigurationen, die bei garantierter Netzabdeckung und geringem Ressourcenverbrauch eine hohe Servicequalität aufweisen.

Spektralpunkte vom Typ π_+ und π_- symmetrischer Operatoren in Räumen mit indefinitem Produkt

FRIEDRICH PHILIPP

Es sei $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum und $[\cdot, \cdot]$ ein weiteres inneres Produkt auf \mathcal{H} , welches bezüglich der Hilbertraumtopologie stetig ist, d.h. es existiere ein $c > 0$, so dass

$$|[x, y]| \leq c\|x\|\|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H}$$

gilt, und es sei A ein beschränkter Operator auf \mathcal{H} , welcher der Symmetriebedingung

$$[Ax, y] = [x, Ay] \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H} \quad (*)$$

genüge. Ein approximativer Eigenwert $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(A)$ heißt *Spektralpunkt vom Typ π_+ von A* , wenn es einen endlich-kodimensionalen Unterraum \mathcal{H}_λ in \mathcal{H} gibt, so dass für jede (bezüglich λ) approximative Eigenfolge (x_n) (d.h. $\|x_n\| = 1$ und $Ax_n - \lambda x_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$) in \mathcal{H}_λ alle Häufungspunkte der Folge $([x_n, x_n])$ positiv sind. Die Menge all dieser Punkte λ bezeichnen wir mit $\sigma_{\pi_+}(A)$.

Für ein $\lambda \in \sigma_{\pi_+}(A)$ beschreiben wir alle möglichen Unterräume \mathcal{H}_λ mit der oben genannten Eigenschaft. Unter all diesen bestimmen wir einen Unterraum mit minimaler Kodimension. Ist $\lambda \in \sigma_{\pi_+}(A)$ und K ein kompakter Operator, welcher die Symmetriebedingung $(*)$ erfüllt, dann beweisen wir, dass λ entweder in $\sigma_{\pi_+}(A+K)$ oder in $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ap}}(A+K)$ liegt.

Die Menge $\sigma_{\pi_+}(A)$ liegt relativ offen in $\sigma_{\text{ap}}(A)$. Für reelle Punkte λ aus $\sigma_{\pi_+}(A)$ zeigen wir, dass es eine in \mathbb{C} offene Umgebung U von λ gibt, so dass entweder alle Punkte aus U Eigenwerte von A sind oder $(U \setminus \mathbb{R}) \cap \sigma_{\text{ap}}(A)$ leer ist. Gilt sogar $U \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass die Norm der Resolvente $(A - \mu)^{-1}$ nicht schneller wächst als $|\text{Im}\mu|^{-k}$ für $\text{Im}\mu \rightarrow 0$, $\mu \in U \setminus \mathbb{R}$.

Eines der Hauptresultate dieser Arbeit ist die Existenz einer lokalen Spektralfunktion auf Intervallen $\Delta \subset \sigma_{\pi_+}(A) \cup \rho(A)$, die eine in \mathbb{C} offene Umgebung U mit $U \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$ besitzen.

Diese Ergebnisse können zum Beispiel auf Sturm-Liouville-Operatoren mit indefinitem Gewicht angewandt werden.

Kombinatorik projizierter deformierter Produkte

RAMAN SANYAL

Eines der zentralen Themen der diskreten Geometrie ist das Studium von Polytopen, also geometrischen Objekten, die von endlich vielen (Hyper-)Ebenen berandet werden, an Hand ihrer kombinatorischen Eigenschaften. Bereits im 4-dimensionalen Raum, obwohl dieser sich von dem unseren um nur eine weitere Koordinate unterscheidet, ist unser Wissen über die in ihm lebenden Polytope unvollständig. Eine somit natürliche Fragestellung lautet: Wie sehen Polytope mit besonders extremalen kombinatorischen Eigenschaften aus.

Unsere Arbeit [2] basiert auf einer Konstruktion von Ziegler [1] für eine zwei Parameter Familie von 4-dimensionalen Polytopen mit aussergewöhnlichen kombinatorischen Eigenschaften. Faszinierend an dieser Konstruktion ist, dass sie nicht direkt im \mathbb{R}^4 arbeitet sondern einen Umweg über weitaus höhere Dimensionen nimmt. Genaue werden Produkte von Polygonen in kontrollierter Weise deformiert, so dass die Projektion in den \mathbb{R}^4 das gewünschte Ergebnis liefert.

In dem Vortrag beschränken wir uns auf den Spezialfall der *nachbarschaftlich kubischen Polytope* und geben einen Eindruck wie Methoden aus der linearen Algebra neue Konstruktionsmethoden für Polytope liefern.

Literatur

- [1] Günter M. Ziegler, *Projected products of polygons*, Electronic Research Announcements AMS, 2004, 10, pp. 122-134
- [2] Raman Sanyal, Thilo Schröder, and Günter M. Ziegler, *Polytopes and polyhedral surfaces via projection*, in preparation, 2005

Polytope in Verbindung mit längenbeschränkten gerichteten Kreisen

RÜDIGER STEPHAN

Meine Diplomarbeit befaßt sich mit dem längenbeschränkten gerichteten Kreisproblem, d.h. dem Problem, in einem gerichteten Graphen $D = (V, A)$ mit Bogen gewichten $c_a \in \mathbb{R}$, $a \in A$, einen gerichteten Kreis C einer zulässigen Länge $|C| \in L$ mit minimalem Gewicht $\sum_{a \in C} c_a$ zu bestimmen. Dabei ist L die Menge der zulässigen Kreislängen. Das zugehörige Polytop ist das Polytop $P_C^L(D)$ der längenbeschränkten gerichteten Kreise C in einem Digraphen D , das ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der gerichteten Kreise C , die eine zulässige Länge $|C|$ haben.

In Spezialfällen, z.B. wenn nur eine bestimmte Kreislänge $k \in \mathbb{N}$ zugelassen wird, kann das Problem in polynomialer Zeit gelöst werden. Aber im Allgemeinen ist das Problem NP-schwer. Beispielsweise erhalten wir für $L = \{|V|\}$ das Asymmetrische Traveling Salesman Problem.

In meiner Diplomarbeit habe ich mehrere Familien von gültigen Ungleichungen daraufhin untersucht, ob sie für $P_C^L(D_n)$, dem längenbeschränkten gerichteten Kreispolytop über dem vollständigen Digraphen D_n , facetteninduzierend sind (oder nicht). Dabei ist es mir zum Teil gelungen, sie vollständig zu klassifizieren, d.h. (in Abhängigkeit von L und n) notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, damit eine gültige Ungleichung facettendefinierend ist. Da das Polytop $P_C^L(D_n)$ mit vielen gerichteten und ungerichteten Kreispolytopen, die bereits gut untersucht sind, verwandt ist, steht bereits eine relativ grosse Palette von Ungleichungen zur Verfügung, die untersucht werden können.

Ein weiteres Resultat meiner Diplomarbeit ist, dass (bis auf ganz wenige Ausnahmen) Facetten für (längenbeschränkte) gerichtete Wegpolytope auf relativ einfache Art und Weise in solche für (längenbeschränkte) gerichtete Kreispolytope geliftet werden können. Dem liegt ein einfacher graphentheoretischer Zusammenhang zugrunde.

In meinem Vortrag möchte ich nach der Problemeinführung die Dimension von $P_C^L(D_n)$ in Abhängigkeit von L und n bestimmen und ein oder zwei interessante Ungleichungen herleiten. Anschließend habe ich vor, die erwähnte Liftingprozedur zu skizzieren und daraus resultierende Konsequenzen anzudeuten.

Mathematische Preisplanung im ÖPNV

MARIKA NEUMANN

Es wird ein mathematisches Modell vorgestellt, mit dem die Einnahmen im öffentlichen Personennahverkehr (ÖPNV) maximiert werden. Dazu betrachten wir ein gegebenes Nahverkehrsnetz und verschiedene Tarifsysteme.

Eine Grundlage des Modells ist die Annahme, dass sich die Beziehung zwischen Preis und Anzahl verkaufter Tickets als eine Nachfragefunktion darstellen lässt. Mit der Nachfragefunktion und einem gegebenen Tarifsystem lassen sich die erwarteten Einnahmen relativ leicht bestimmen. Die Schwierigkeit besteht darin, eine Funktion zu finden, die das Nachfrageverhalten der Passagiere möglichst genau abbildet. Es wird eine Konstruktion von Nachfragefunktionen aus Entscheidungsmodellen (insbesondere dem Logit Modell) vorgestellt. Diese Möglichkeit zur Bestimmung der Nachfrage findet auch in der ökonomischen Literatur Anwendung.

Wir führen Berechnungen am Beispiel des Intercitynetztes in den Niederlanden durch. Insgesamt ergibt sich ein nichtlineares Modell, das in vielerlei Hinsicht (z. B. soziale Aspekte oder Kosten) erweitert werden kann.

Wachstumsgeschwindigkeit zweidimensionaler isotroper Brownscher Flüsse

HOLGER VAN BARGEN

Stochastische Flüsse können zur Modellierung von Staubdiffusionen oder der Durchmischung von Flüssigkeiten verwendet werden. Es handelt sich bei Ihnen um zufällige Diffeomorphismengruppen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Isotrope Brownsche Flüsse sind Flüsse auf dem \mathbb{R}^d , deren Verteilung sich durch Invarianz gegenüber Translationen und orthogonalen Transformationen auszeichnet. Außerdem stimmt ihre Verteilung in positiver Zeitrichtung in einer gewissen Weise mit der Verteilung in negativer Zeitrichtung überein. Der Vortrag wird sich mit dem Bild einer beschränkten, zusammenhängenden Menge unter dem Fluss beschäftigen. Insbesondere geht es um die asymptotische Wachstumsgeschwindigkeit des Durchmessers d_t und die Form einer solchen Menge. Es wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass die Wachstumsgeschwindigkeit (gemessen als $\liminf_{t \rightarrow \infty} d_t$) deterministisch ist. Zum einen ist es notwendig, dass der Top-Lyapunov-Exponent, eine Größe, die mit dem lokalen Verhalten des Flusses zusammenhängt, positiv ist. Andernfalls würde eine beschränkte Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit auf einen Punkt kontrahiert. Dies zusammen mit einer geometrischen Bedingung, der so genannten hig-Bedingung erweist sich als hinreichend dafür, dass eine deterministische Menge \mathcal{B} existiert, so dass für beliebiges $\epsilon > 0$ und nicht triviales $\gamma \subset \mathbb{R}^d$ die folgenden Inklusionen noch für beliebig große Zeiten t gilt:

$$(1 - \epsilon)t\mathcal{B} \subset \bigcup_{0 \leq s \leq t} \Phi_{0,s}(\gamma) \subset (1 + \epsilon)t\mathcal{B} \quad (1)$$

Dies verallgemeinert Ergebnisse von Dolgopyat, Kaloshin und Korolov, die ein ähnliches Ergebnis für periodische Flüsse gezeigt haben. Die dabei verwendeten Methoden wurden mit Techniken von Scheutzow, Steinsaltz und Dimitrov sowie neuen Ansätzen kombiniert.