Spektralpunkte vom Typ π_+ und π_- symmetrischer Operatoren in Räumen mit indefinitem Produkt

Friedrich Philipp

Es seien

- $(\mathcal{H}, (\cdot\,, \cdot))$ ein komplexer Hilbertraum,

Es seien

- $(\mathcal{H}, (\cdot\,, \cdot))$ ein komplexer Hilbertraum,

- G ein selbstadjungierter und stetiger Operator auf $\mathcal{H}$,

Es seien

- $(\mathcal{H}, (\cdot\,, \cdot))$ ein komplexer Hilbertraum,
- G ein selbstadjungierter und stetiger Operator auf $\mathcal{H}$,
- $[x, y] := (Gx, y)$ für $x, y \in \mathcal{H}$,

Es seien

- $(\mathcal{H}, (\cdot\,,\cdot))$ ein komplexer Hilbertraum,
- G ein selbstadjungierter und stetiger Operator auf $\mathcal{H}$,
- $[x, y] := (Gx, y)$ für $x, y \in \mathcal{H}$,
- A ein stetiger Operator auf $\mathcal{H}$ mit

$$[Ax, y] = [x, Ay] \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Spektrum und approximatives Punktspektrum

Spektrum und approximatives Punktspektrum

Def: Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\lambda \in \sigma(A) :\Longleftrightarrow A - \lambda I$ nicht bijektiv

Spektrum und approximatives Punktspektrum

Def: Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\lambda \in \sigma(A) :\Longleftrightarrow A - \lambda I$ nicht bijektiv

(ii) $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$

Spektrum und approximatives Punktspektrum

Def: Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\lambda \in \sigma(A) :\Longleftrightarrow A - \lambda I$ nicht bijektiv

(ii) $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$

(iii) $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(A) :\Longleftrightarrow \exists \underbrace{(x_n) \subset \mathcal{H} \text{ mit } \|x_n\| = 1, (A - \lambda I)x_n \to 0}_{\text{Approximative Eigenfolge}}$

Spektrum und approximatives Punktspektrum

Def: Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i) $\lambda \in \sigma(A) :\Longleftrightarrow A - \lambda I$ nicht bijektiv

(ii) $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$

(iii) $\lambda \in \sigma_{\mathsf{ap}}(A) :\Longleftrightarrow \exists \underbrace{(x_n) \subset \mathcal{H} \text{ mit } \|x_n\| = 1, (A - \lambda I)x_n \to 0}_{\text{Approximative Eigenfolge}}$

(iv) $\mathsf{r}(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathsf{ap}}(A)$.

Spektrum positiven Typs und vom Typ π_+

Spektrum positiven Typs und vom Typ π_+

Def.: Es ist $\lambda \in \sigma_{++}(A)$ genau dann, wenn $\lambda \in \sigma_{\mathsf{ap}}(A)$ und wenn für alle approximativen Eigenfolgen $(x_n) \subseteq \mathcal{H}$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} [x_n, x_n] > 0.$$

Spektrum positiven Typs und vom Typ π_+

Def.: Es ist $\lambda \in \sigma_{++}(A)$ genau dann, wenn $\lambda \in \sigma_{\mathsf{ap}}(A)$ und wenn für alle approximativen Eigenfolgen $(x_n) \subseteq \mathcal{H}$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} [x_n, x_n] > 0.$$

Def.: Es ist $\lambda \in \sigma_{\pi_+}(A)$ genau dann, wenn $\lambda \in \sigma_{\mathsf{ap}}(A)$ und wenn ein Unterraum $\mathcal{H}_\lambda$ mit $\operatorname{codim} \mathcal{H}_\lambda < \infty$ existiert, so dass für alle approximativen Eigenfolgen $(x_n) \subseteq \mathcal{H}_\lambda$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} [x_n, x_n] > 0.$$

Spektrum positiven Typs und vom Typ π_+

Def.: Es ist $\lambda \in \sigma_{++}(A)$ genau dann, wenn $\lambda \in \sigma_{\mathsf{ap}}(A)$ und wenn für alle approximativen Eigenfolgen $(x_n) \subseteq \mathcal{H}$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} [x_n, x_n] > 0.$$

Def.: Es ist $\lambda \in \sigma_{\pi_+}(A)$ genau dann, wenn $\lambda \in \sigma_{\mathsf{ap}}(A)$ und wenn ein Unterraum $\mathcal{H}_\lambda$ mit $\operatorname{codim} \mathcal{H}_\lambda < \infty$ existiert, so dass für alle approximativen Eigenfolgen $(x_n) \subseteq \mathcal{H}_\lambda$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} [x_n, x_n] > 0.$$

Bem.: Es gilt $\sigma_{++}(A) \subset \mathbb{R}$.

Welche $\mathcal{H}_\lambda$ sind möglich?

Welche $\mathcal{H}_\lambda$ sind möglich?

Satz: Es sei $\lambda \in \sigma_{\pi_+}(A)$ und $\operatorname{codim} \mathcal{H}_\lambda < \infty$. Dann:

$\mathcal{H}_\lambda$ wie in der Def. von $\sigma_{\pi_+}(A) \iff \overline{\mathcal{H}_\lambda} \cap \ker(A - \lambda I)$ ist positiv.

Welche $\mathcal{H}_\lambda$ sind möglich?

Satz: Es sei $\lambda \in \sigma_{\pi_+}(A)$ und $\operatorname{codim} \mathcal{H}_\lambda < \infty$. Dann:

$\mathcal{H}_\lambda$ wie in der Def. von $\sigma_{\pi_+}(A) \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{H}_\lambda} \cap \ker(A - \lambda I)$ ist positiv.

Folgerung: $\underbrace{\sigma_{\pi_+}(A) \setminus \sigma_{++}(A)}_{\text{„Echte“ } \pi_+\text{-Punkte}} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A)$.

Kompakte Störungen

Satz: Es sei K ein kompakter, G-symmetrischer Operator. Dann:

Kompakte Störungen

Satz: Es sei K ein kompakter, G-symmetrischer Operator. Dann:

$$\sigma_{\pi_+}(A+K) \cup \mathsf{r}(A+K) = \sigma_{\pi_+}(A) \cup \mathsf{r}(A).$$

$++$-Intervalle

Satz: Es gelte

$$[a, b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{++}(A).$$

$++$-Intervalle

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{++}(A).$$

Dann ex. offene Umgebung U von $[a,b]$ mit

$$U \setminus \mathbb{R} \subset \mathsf{r}(A).$$

π_+-Intervalle

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{\pi_+}(A).$$

Dann ex. offene Umgebung U von $[a,b]$, so dass entweder

π_+-Intervalle

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{\pi_+}(A).$$

Dann ex. offene Umgebung U von $[a,b]$, so dass entweder

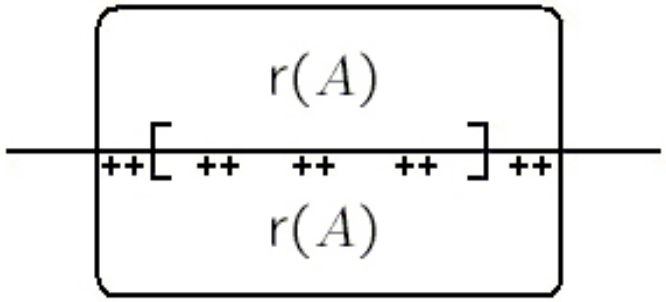
$$U \setminus \mathbb{R} \subset \mathsf{r}(A)\ ,\ U \cap \mathbb{R} \cap (\sigma_{\pi_+}(A) \setminus \sigma_{++}(A)) \text{ ist endlich}$$

oder

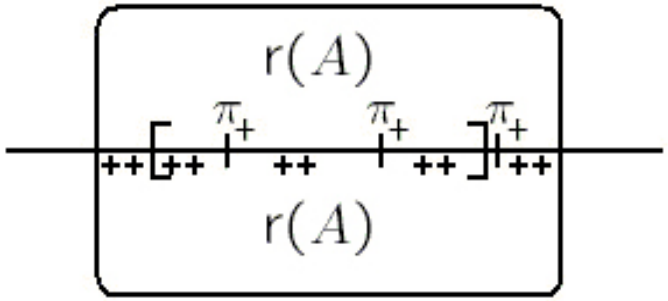
$$U \subset \sigma_{\mathsf{p}}(A)$$

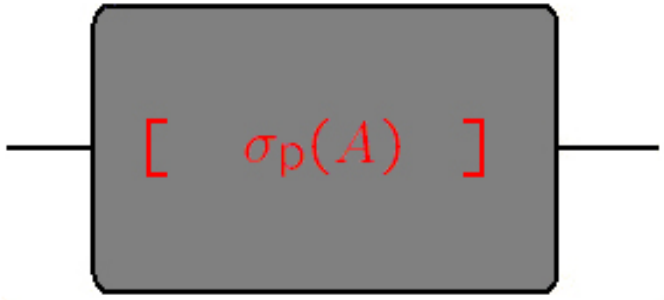
gilt.

++-Intervall



π_+-Intervall





Wachstum der Resolvente

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{++}(A) \quad \text{und} \quad U \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A).$$

Wachstum der Resolvente

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{++}(A) \quad \text{und} \quad U \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A).$$

Dann gilt für $\lambda \in U \setminus \mathbb{R}$

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\mathsf{Im}\lambda|} \quad (M>0).$$

Wachstum der Resolvente

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{++}(A) \quad \text{und} \quad U \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A).$$

Dann gilt für $\lambda \in U \setminus \mathbb{R}$

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\mathsf{Im}\lambda|} \quad (M>0).$$

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{\pi_+}(A) \quad \text{und} \quad U \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A).$$

Dann gilt für $\lambda \in U \setminus \mathbb{R}$

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\mathsf{Im}\lambda|^m} \quad (M>0,\ m \geq 1).$$

Die lokale Spektralfunktion

Die lokale Spektralfunktion

Satz: Es gelte

$$[a,b] \cap \sigma_{\mathsf{ap}}(A) \subset \sigma_{\pi_+}(A) \quad \text{und} \quad U \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A).$$

Dann ex. eine lokale Spektralfunktion E auf (a,b) für A.

Raum, Operator und Spektrum werden zerlegt

Raum, Operator und Spektrum werden zerlegt

- E bildet Teilmengen von (a, b) auf stetige Operatoren ab.

Raum, Operator und Spektrum werden zerlegt

- E bildet Teilmengen von (a, b) auf stetige Operatoren ab.

- $\mathcal{H}_1 := E(\Delta)\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_2 := (I - E(\Delta))\mathcal{H}$ sind invariant unter A.

Raum, Operator und Spektrum werden zerlegt

- E bildet Teilmengen von (a, b) auf stetige Operatoren ab.
- $\mathcal{H}_1 := E(\Delta)\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_2 := (I - E(\Delta))\mathcal{H}$ sind invariant unter A.
- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1[\dot{+}]\mathcal{H}_2$.

Raum, Operator und Spektrum werden zerlegt

- E bildet Teilmengen von (a, b) auf stetige Operatoren ab.
- $\mathcal{H}_1 := E(\Delta)\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_2 := (I - E(\Delta))\mathcal{H}$ sind invariant unter A.
- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1[\dot{+}]\mathcal{H}_2$.
- Mit $A_1 := A|\mathcal{H}_1$ und $A_2 := A|\mathcal{H}_2$ ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Raum, Operator und Spektrum werden zerlegt

- E bildet Teilmengen von (a, b) auf stetige Operatoren ab.
- $\mathcal{H}_1 := E(\Delta)\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_2 := (I - E(\Delta))\mathcal{H}$ sind invariant unter A.
- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1[\dot{+}]\mathcal{H}_2$.
- Mit $A_1 := A|\mathcal{H}_1$ und $A_2 := A|\mathcal{H}_2$ ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.
- $\sigma(A_1) \subset \overline{\Delta}$ und $\sigma(A_2) \subset \overline{\sigma(A) \setminus \Delta}$.

Beschaffenheit der Spektralräume $E(\Delta)\mathcal{H}$

Satz: Es gilt

Beschaffenheit der Spektralräume $E(\Delta)\mathcal{H}$

Satz: Es gilt

- Es ex. eine Zerlegung $E(\Delta)\mathcal{H} = \mathcal{E}_+[\dot{+}]\mathcal{E}_-[\dot{+}]\mathcal{E}_0$,

- $\mathcal{E}_+$ ist positiv, $\mathcal{E}_-$ ist negativ, $\mathcal{E}_0[\perp]E(\Delta)\mathcal{H}$,

Beschaffenheit der Spektralräume $E(\Delta)\mathcal{H}$

Satz: Es gilt

- Es ex. eine Zerlegung $E(\Delta)\mathcal{H} = \mathcal{E}_+[\dot{+}]\mathcal{E}_-[\dot{+}]\mathcal{E}_0$,
- $\mathcal{E}_+$ ist positiv, $\mathcal{E}_-$ ist negativ, $\mathcal{E}_0[\perp]E(\Delta)\mathcal{H}$,
- $\mathcal{E}_- \dot{+} \mathcal{E}_0$ ist endlichdimensional,
- Auf $\mathcal{E}_+$ sind $[\cdot,\cdot]^{1/2}$ und $\|\cdot\|$ äquivalente Normen.