Eine neue Dimension: Brown'sche Bewegung als Fraktal

Albert Haase

Wie oft kehrt ein sich zufallig bewegendes Teilchen zu seinem Ausgangspunkt zurück? Nehmen wir als Modell die Brown'sche Bewegung im $\mathbb{R}^d$ an und legen wir den Ausgangspunkt in den Ursprung. Dann lautet die Frage: Wie „groß“ ist die Menge N der Nullstellen der Brown'schen Bewegung?

Die Antwort hierauf ist abhängig von der Dimension d. Im Fall $d = 1$ trifft das Teilchen verblüffenderweise jeden Punkt unendlich oft mit Wahrscheinlichkeit Eins (Rekurrenz)! Für $d > 1$ geschieht dies allerdings mit Wahrscheinlichkeit Null.

Für unsere Frage ist also nur der Fall $d = 1$ interessant: Es lässt sich zeigen, dass N das Volumen (Lebesgue-Maß) Null hat. Und es ist in der Tat nicht leicht, ein Maß auf N zu definieren, das nicht null oder unendlich ist (Brownian Local Time).

Als Erweiterung solcher Begriffe wie Vektorraum– und topologische Dimension ist das neuere Konzept der Hausdorffdimension sehr geeignet, um uns eine Vorstellung von der Größe von N zu verschaffen. Können wir, ohne ein Maß auf N zu definieren, die Hausdorffdimension von N berechnen?

In diesem Vortrag werden wir sehen, wie man fraktale Eigenschaften der Brown'schen Bewegung, wie zum Beispiel ihre zeitliche Skalierungsinvarianz verwenden kann, um dieses Problem geometrisch zu lösen:

Wir werden die Nullstellenmenge eines verwandten Prozesses (Brownian Bridge) als zufälligen Baum darstellen und diese Baum-Struktur ausnutzen, um mithilfe des Max-Flow-Min-Cut-Theorems aus der Graphentheorie und Ergebnissen zur Existenz von Flüssen in Netzwerken die Hausdorffdimension von N zu berechnen!