Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit unsicheren Koeffizientenfunktionen

Stephan Scholz

Ein Großteil der Probleme, die in den Ingenieurswissenschaften auftreten, werden durch partielle Differentialgleichungen beschrieben. Die großen Fortschritte in der Informatik und der numerischen Mathematik führten in den letzten Jahrzehnten zu immer besseren Algorithmen, so dass immer komplexere Aufgaben bewältigt werden konnten. Die Analyse dieser Methoden ist mittlerweile so weit vorangeschritten, dass man in der Lage ist, zufriedenstellende Aussagen über die Genauigkeit und Stabilität der numerischen Lösung zu treffen. Dabei stellt sich heraus, dass die Algorithmen inzwischen mit sehr hoher Präzision arbeiten.

In vielen Anwendungen ist man allerdings nicht in der Lage, sämtliche Eingangsdaten des Problems anzugeben, so dass eine hohe Genauigkeit nur bedingt Vorteile bei der Berechnung bringt. Diese sogenannte Unsicherheit in den Eingangsdaten wandelt sich in eine entsprechende Unsicherheit der Lösung um.

Einige Anwendungsfälle sind zum Beispiel: die Schadstoffausbreitung im Boden, Rohrströmungen mit zufälligen Randbedingungen an den Wänden und strukturmechanische Untersuchungen von Gebäuden, die einem Erdbeben ausgesetzt sind.

Ziel meiner Diplomarbeit war es, die Diskretisierung solcher partieller Differentialgleichungen zu untersuchen. Dabei ging es vornehmlich darum, den sogenannten Spektralansatz als Lösungsweg für solche Probleme zu betrachten, der unter bestimmten Bedingungen den Monte-Carlo-Methoden überlegen ist.

In meinem Vortrag werde ich anhand eines einfachen Modelproblems kurz die möglichen numerischen Lösungsmethoden vorstellen und dann auf die wichtigsten Aspekte des Spektralansatzes eingehen. Dabei wird die komplexe Analysis helfen die Lösung in Polynome zu entwickeln. Dies führt dann auf eine beste N-Term Approximation der Lösung. Mit Hilfe dieser Ergebnisse ist es dann möglich, Konvergenzraten einer Finite-Elemente-Diskretisierung anzugeben. Am Ende stelle ich einen Vergleich mit der Monte-Carlo-Methode an.