TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / C. Bohle Abgabe: 6.5.2002

2. Übung Differentialgeometrie II

(Tangentialraum)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann ist der Tangentialraum T_pM natürlich isomorph zu einem Unterraum des $\mathbb{R}^m$ (wie?).

i) Sei $f = \varphi^{-1}$ eine lokale Parametrisierung (d.h. Umkehrabbildung einer Karte) mit $f(0) = p$. Welche Vektoren im $\mathbb{R}^m$ entsprechen der Gaussbasis der Karte φ?

ii) Sei $M \cap U = h^{-1}(0)$ wobei $h\colon U \to \mathbb{R}^{m-n}$ eine Abbildung ist, die 0 als regulären Wert hat. Geben Sie eine Basis von $T_pM^\perp$ an für $p \in M \cap U$.

iii) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kompakt. Zeigen Sie, daß jeder Untervektorraum der Dimension n des $\mathbb{R}^{n+1}$ Tangentialraum in mindestens einem Punkt ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

i) Berechnen Sie den Kommutator $[V, W]$ der Vektorfelder

$$V = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}$$

und

$$W = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

ii) Berechnen Sie, wie die Vektorfelder in Polarkoordinaten aussehen.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{RP}^n$ mit $x \mapsto [x]$. Zeigen Sie:

i) π ist eine Submersion, d.h. der Rang von $d\pi_x\colon T_x\,\mathbb{R}^{n+1} \to T_{[x]}\,\mathbb{RP}^n$ ist n für alle x. Was ist der Kern von $d\pi_x$?

ii) $d\pi_{\lambda x}\lambda v = d\pi_x v$ für alle $x, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

iii)* $T_{[x]}\,\mathbb{RP}^n \cong Hom([x], \mathbb{R}^{n+1}/[x])$ (man betrachte hier $[x]$ als Unterraum der Dimension 1).