TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / C. Bohle Abgabe: 13.5.2002

3. Übung Differentialgeometrie II

(Vektorbündel)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen Sie, daß das *Kotangentialbündel* T^*M einer Mannigfaltigkeit ein Vektorbündel ist. (Der Beweis geht analog zu dem für das Tangentialbündel TM. Tip: Ist eine Karten $\varphi = (x_1, ..., x_n)$ auf $U \subset M$ gegeben, so liefern die Differentiale $dx_1, ..., dx_n$ für alle $p \in U$ eine Basis der Faser $T_p^*M := (T_pM)^*$.)

2. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß $T\mathbf{S}^1$ ein triviales Bündel ist.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\Sigma = \{([x], x) \in \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ das *tautologische Bündel*. Zeigen Sie:

i) Σ ist ein reelles Linienbündel.

ii) Σ ist nicht trivial.

iii) Die Menge der Vektoren der Länge kleiner 1 bilden ein Möbiusband.

iv)* Jedes Linienbündel über $\mathbf{S}^1 \cong \mathbb{RP}^1$ ist entweder isomorph zum Tangentialbündel oder isomorph zum tautologischen Bündel. (Zwei Vektorbündel sind isomorph, wenn es einen Diffeomorphismus der Totalräume gibt, der Fasern erhält und auf den Fasern linear ist. Tip: Man mache sich zuerst klar, daß jedes Linienbündel auf einem Intervall trivial ist.