TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / C. Bohle Abgabe: 10.6.2002

6. Übung Differentialgeometrie II

(Hyperbolische Geometrie)

Hausaufgaben

Der Ausdruck *hyperbolische Ebene* bezeichne hier wahlweise eine der Mengen $B_1^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ oder $H_+^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ mit der entsprechenden Riemannschen Metrik.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Sei d die (topologische) Metrik, die zur (Riemannschen) Metrik der hyperbolischen Ebenen gehört. Wie sieht die Menge $\{q \mid d(p,q) = \epsilon\}$ für festes p und $\epsilon > 0$ aus?

2. Aufgabe (4 Punkte)

Was sind die Geodätischen im Halbraummodell H_+^2?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (in der hyperbolischen Ebene)?

i) Je zwei Punkte lassen sich durch genau eine Geodätische verbinden.

ii) Zwei Geodätische sind gleich oder schneiden sich genau in einem Punkt.

iii) Gegeben eine Geodätische l und Punkt $p \notin l$. Dann gibt es genau eine Geodätische l' mit $p \in l'$ und $l \cap l' = \emptyset$.

iv) Gegeben eine Geodätische l und Punkt $p \notin l$. Dann gibt es genau eine Geodätische l' mit $p \in l'$ und $l \perp l'$.

Welche treffen für den Euklidischen Raum, die Sphäre bzw. allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 zu?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Die Gruppe $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ wirkt auf H_+^2 durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

i) Zeigen Sie, daß $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ eine Isometrie von H_+^2 ist.

ii) Zeigen Sie, daß die Wirkung transitiv ist. (Jeder Punkt p kann auf jeden Punkt q bewegt werden mittels eines Gruppenelementes.) Wann genau können zwei Punkte auf zwei andere Punkte abgebildet werden mit einem Element von $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$? Ist dieses dann Eindeutig?

iii) Zeigen Sie, daß die Gruppe erzeugt wird von Translationen in x–Richtung, von Streckungen und von der Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$.

(Tip: Lösen sie iii) zuerst.)