TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002
Fachbereich 3 - Mathematik
Prof. Dr. A. Bobenko / C. Bohle Abgabe: 8.7.2002

9. Übung Differentialgeometrie II

(Riemannsche Flächen)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

i) Zeigen Sie, daß die Menge der holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ identifiziert werden kann mit der Menge der gebrochenrationalen Funktionen $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (wobei P und Q Polynome sind).

ii) Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra, d.h. jedes Polynom vom Grad ≥ 1 hat eine Nullstelle.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $\lambda_1, ..., \lambda_N$ paarweise verschieden. Dann definiert die Gleichung

$$\mu^2 = \Pi_{i=1}^N (\lambda - \lambda_i)$$

eine Riemannschen Fläche. Wieviele Punkte sind über $\lambda = \infty$? Wieviele Verzweigungspunkte gibt es? Was ist des Geschlecht der Fläche?

3. Aufgabe (4 Punkte)

i) Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $f\colon M \to \mathbb{CP}^1$ eine holomorphe Funktion vom Grad 2. Wieviele Verzweigungspunkte hat f? Welche Ordunung haben diese?

ii) Zeigen Sie, daß eine derartige Flächen immer isomorph zu einer der Flächen aus Aufgabe 2 ist.

iii) Sei M eine Fläche vom Geschlecht 1 mit einer meromorphen Funktion vom Grad 2 (Bemerkung: auf Flächen von Geschlecht 1 gibt es immer eine derartige Funktion.) Dann ist M isomorph zur Fläche des Polynomes $\mu^2 = \lambda(\lambda-1)(\lambda-l)$ mit $l \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.