Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Pinkall / Knöppel
http://www.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/SS11/DGI SS 11

Differentialgeometrie I: Kurven und Flächen

Aufgabenblatt 10

(Tschebyscheff–Netz, Pseudosphäre)

Abgabe: 28.6./29.6.2011

Definition:

Eine parametrisierte Fläche $f\colon \mathbb{R}^2 \supset M \to \mathbb{R}^3$ heißt ein Tschebycheff–Netz, wenn $\|f_u\| = \|f_v\| = 1$.

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supset M \to \mathbb{R}^3$ eine Asymptotenlinienparametrisierung und $K \equiv -1$. Zeige, dass f genau dann ein Tschebyscheff–Netz ist, wenn N ein Tschebyscheff–Netz ist.

Aufgabe 2 **8 Punkte**

Sei

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \operatorname{sech}(u+v)\cos(u-v) \\ \operatorname{sech}(u+v)\sin(u-v) \\ \tanh(u+v) - (u+v) \end{pmatrix}.$$

a) Skizziere die Fläche.

b) Zeige, dass f ein Tschebyscheff–Netz ist.

c) Zeige, dass f eine Asymptotenlinienparametrisierung ist.

d) Zeige, dass die Gaußsche Krümmung von f gleich -1 ist.

e) Zeige, dass die durch f beschrieben Fläche durch Rotation der Traktrix um die z-Achse entsteht (d.h., dass der Tangentenabschnitt zwischen Flächenpunkt und z-Achse konstant ist).

f) Bestimme den Winkel φ zwischen f_u und f_v und überprüfe, dass er die Sinus-Gordon Gleichung $\varphi_{uv} = \sin(\varphi)$ löst.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Ein regulär parametrisiertes Flächenstück habe die erste Fundamentalform $E = G = 1$, $F = \cos\theta$, $\theta\colon \mathbb{R}^2 \supset M \to \mathbb{R}$ (Tschebyscheff–Netz). Zeige, dass dann für die Gaußsche Krümmung gilt

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin\theta}.$$